

Programme de colle n°29

semaine du 1 au 5 juin

Notions vues en cours

Chapitre 37 : Variables aléatoires

- **Variable aléatoire** (réelle, complexe) : définition ; abréviations v.a. et v.a.r.
- Étant donné une v.a. $X : \Omega \rightarrow E$ et $A \subset E$: notations des événements $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$; plus généralement, l'évènement $\{X \text{ vérifie } \mathfrak{P}\}$ avec \mathfrak{P} une propriété est l'ensemble des ω de Ω tels que $X(\omega)$ vérifie \mathfrak{P} ; notations $\mathbb{P}(X \in A)$ et $\mathbb{P}(X \text{ vérifie } \mathfrak{P})$
- Cas particuliers du points précédent avec $\mathbb{P}(X = x)$, ainsi que (si X est une v.a.r.) $\mathbb{P}(X \leq x)$, $\mathbb{P}(X > x)$, etc.
- **Loi d'une v.a.** X ; notation \mathbb{P}_X ou encore $\mathbb{P}(X \in \cdot)$; c'est une probabilité sur E (donc en particulier vérifie les propriétés de toute probabilité)
- La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ est une densité de probabilités et détermine entièrement la loi de X
- **Lois usuelles** : loi de Bernoulli ; notation $X \sim \mathcal{B}(p)$; loi binomiale ; notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$; si X compte le nombre de succès de n Bernoulli (indépendantes) de même paramètre p , alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$; loi uniforme sur E ; notation $X \sim \mathcal{U}(E)$
- Exemple de v.a. : l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ où A est un évènement (de Ω)
- Opérations sur les v.a. : avec $E \subset \mathbb{K}$ définition de la somme / produit / multiplication par un scalaire ; avec E quelconque définition de la composition ; notation $f(X)$
- $X \sim Y$ signifie que X, Y ont la même loi : c'est une relation d'équivalence ; expression de $\mathbb{P}(f(X) = y)$ en fonction des valeurs de $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ en trouvant les antécédents de y par f .
- Notations $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$ et $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$; définition de X et Y sont des v.a. indépendantes ; notation $X \perp\!\!\!\perp Y$; généralisation à n v.a. avec les notions d'indépendance deux à deux et d'indépendance (mutuelle)
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors (quand $\mathbb{P}(Y = y) > 0$), on a $\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$; alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$; généralisation à n variables indépendantes avec n fonctions ; lemme des coalitions
- La somme de n v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$
- Loi conditionnelle d'une variable X sachant un évènement B : c'est l'application $A \in \mathcal{P}(E) \mapsto \mathbb{P}(X \in A | B)$, il s'agit d'une probabilité sur E
- Pour toute v.a. $Y : \Omega \rightarrow F$ la famille $(\{Y = y\})_{y \in F}$ est un S.C.E. Application de la formule des probabilités totales aux v.a. : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in F} \mathbb{P}(X = x | Y = y) \mathbb{P}(Y = y)$
- Couple de v.a. ; **loi conjointe** ; **lois marginales** ; formule qui donne les lois marginales à partir de la loi conjointe
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors les lois marginales du couple (X, Y) permettent de reconstruire la loi conjointe

Les notions d'espérance et de variance ne sont pas au programme cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres 35 à 37).

Question Longue. Cette semaine, AUCUNE démonstration n'est exigible.

1. Donner les trois lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale). Pour chaque loi, on précisera (sans démonstration) :

- La notation usuelle avec les paramètres.
- Les hypothèses que doivent vérifier ces paramètres.
- L'ensemble des valeurs prises par la v.a.
- La loi de la v.a.

Enfin, on donnera la définition en termes de quantificateurs de "X et Y suivent la même loi".
Chapitre 37, Définitions 37.5 à 37.7 et 37.10

2. Exercice 3 du TD 37
3. Exercice 13 du TD 37

Questions Flash au programme :

Chapitre 37 :

- Donner la définition ensembliste de $\{X \in A\}$ et de $\{X = x\}$
- Soit $X : \Omega \rightarrow E$. Préciser ce qu'on appelle la loi de X (ensembles de départ, d'arrivée, notations)
- On suppose que X suit une loi de Bernoulli. Compléter la notation : $X \sim \dots$ en introduisant le ou les paramètres utilisés. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Donner la loi de X.
- Même question que le point précédent avec une loi binomiale.
- Même question que le point précédent avec une loi uniforme.
- Que signifie "X et Y ont la même loi" en termes de quantificateurs ?
- Que signifie "X et Y sont indépendantes" en termes de quantificateurs ?
- Que signifie " X_1, \dots, X_n sont indépendantes" en termes de quantificateurs ?
- Soit X, Y, Z trois v.a. indépendantes. Peut-on assurer que les v.a. X^Y et $\ln Z$ sont indépendantes ?
Même question avec les v.a. e^{XZ} , e^{XY} et e^{YZ} .
- Qu'appelle-t-on la loi conjointe du couple (X, Y) ? et les lois marginales de (X, Y) ?

Chapitre 36 :

- Que signifie "A est un événement de Ω " ? Si \mathbb{P} est une probabilité sur Ω , quels sont ses ensembles de départ et d'arrivée ?
- Qu'appelle-t-on une distribution de probabilités sur un univers Ω ?
- Que doivent vérifier A et B pour que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$? Que devient cette formule dans le cas général ?
- À quelle condition est-ce que $\mathbb{P}(A | B)$ a un sens ? Que vaut $\mathbb{P}(A | B)$ par définition ?
- Énoncer la formule des probabilités composées
- Énoncer la formule des probabilités totales
- Énoncer la formule de Bayes
- Que signifie "A et B sont indépendants" ? et " A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants" ?

Chapitre 35 : (les notations sont sous-entendues)

- Donner les formules pour $\text{card}(E \times F)$, de $\text{card}(F^E)$ et de $\text{card}(\mathcal{P}(E))$.
- Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Donner la formule pour $\text{card}(A \cup B)$.
- Si $\text{card}(E) = n$, combien y a-t-il de p -uplets de E ?
- Si $\text{card}(E) = n$, combien y a-t-il d'arrangements à p éléments de E ?
- Si $\text{card}(E) = n$, combien y a-t-il de combinaisons à p éléments de E ?
- Soit $f : E \rightarrow F$ avec $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Que peut-on en déduire sur f en termes d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité ?