DS de mathématiques n°2

Sommes, trigonométrie, nombres complexes, fonctions réelles – Corrigé

Noté sur 107,5pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramenée sur 20 en multipliant par 20/50.

Exercice 1 — Calcul de sommes binomiales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{2k} \qquad \text{et} \qquad S'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

On pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1}$$

1) Calculer U_n et V_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$. Que peut-on conjecturer ?

$$U_1 = \binom{1}{0} = \boxed{1}$$

$$U_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{3}{2k} = \binom{3}{0} + \binom{3}{2} = 1 + 3 = \boxed{4}$$

$$U_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{2k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = \boxed{16}$$

$$V_1 = \binom{1}{1} = \boxed{1}$$

$$V_2 = \sum_{k=1}^{2} \binom{3}{2k-1} = \binom{3}{1} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = \boxed{4}$$

$$V_3 = \sum_{k=1}^{3} \binom{5}{2k-1} = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5} = 5 + 10 + 1 = \boxed{16}$$

On peut conjecturer que $U_n = V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Rappeler (sans la démontrer) la formule de symétrisation du coefficient binomial.

Pour tout $K \in \mathbb{Z}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}$$

(on pouvait garder les lettres k et n, mais remplacer par d'autres lettres permet de voir plus facilement comment l'appliquer dans un cas concret)

b) En déduire, grâce au changement d'indice $j = n - k$ dans U_n, que $U_n = V_n$.

On a

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{2n-1}{2(n-j)} \qquad \text{avec } \begin{cases} j = n-k \\ k = n-j \end{cases} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{2n-1}{2n-2j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{2n-1}{2n-1-(2j-1)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{2n-1}{2j-1} \qquad \left(\text{par la q. a), avec } \begin{cases} N = 2n-1 \\ K = 2j-1 \end{cases}\right) \\
&= \boxed{V_n}
\end{aligned}$$

3) a) Écrire U_n et V_n sous forme développée, en faisant apparaître leurs trois premiers et leurs deux derniers termes.

$$V_n = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + \binom{2n-1}{5} + \dots + \binom{2n-1}{2n-3} + \binom{2n-1}{2n-1}$$

$$U_n = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + \binom{2n-1}{4} + \dots + \binom{2n-1}{2n-4} + \binom{2n-1}{2n-2}$$

b) En déduire que $U_n + V_n = 2^{2n-1}$.

En sommant les deux identités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} U_n + V_n &= \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} + \dots \\ &\quad + \binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n-1}{2n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} 1^j 1^{2n-1-j} \\ &= (1+1)^{2n-1} \\ &= \boxed{2^{2n-1}} \end{aligned}$$

4) En déduire U_n et V_n en fonction de n.

Par la question **b)** , on a $V_n = U_n$ et donc, par la question précédente,

$$\begin{aligned} & U_n + V_n = 2^{2n-1} \\ \implies & 2U_n = 2^{2n-1} \\ \implies & U_n = 2^{2n-2} \end{aligned}$$

Ainsi, $U_n = V_n = 2^{2n-2} = \boxed{4^{n-1}}$.

5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \cdots, m\}$. Montrer que $j\binom{m}{j} = \alpha_m \binom{m-1}{j-1}$, avec α_m un réel qui dépend uniquement de m que l'on précisera.

$$\begin{aligned} j\binom{m}{j} &= j \times \frac{m!}{j!(m-j)!} \\ &= \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \\ &= m \times \frac{(m-1)!}{(j-1)! \times [(m-1-(j-1))]!} \\ &= m \times \binom{m-1}{j-1} \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $\alpha_m = \boxed{m}$.

6) En déduire que $S_n = nV_n$, puis la valeur de S_n. *On pourra exprimer le résultat en fonction d'un réel α_m avec une valeur de m bien choisie si l'expression de α_m n'a pas été trouvée en question précédente.*

On a, par la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2k \binom{2n}{2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2n \binom{2n-1}{2k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} \\ &= nV_n \\ &= \boxed{n4^{n-1}} \end{aligned}$$

7) **a)** Rappeler (sans la démontrer) la formule du triangle de Pascal.

Pour tous $K \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{N+1}{K+1}$$

b) En retirant un terme de la somme de U_n et un terme de la somme de V_n, en déduire que $S'_n = U_n + V_n$, puis la valeur de S'_n.

$$\begin{aligned} U_n + V_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \\ &= \binom{2n-1}{2n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} + \binom{2n-1}{0} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k} \right] + 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} + 1 \\ &= \binom{2n}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} + \binom{2n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = S'_n \end{aligned}$$

Ainsi, $S'_n = U_n + V_n = \boxed{2^{2n-1}}$ par la question 3.**b)** .

Exercice 2 — Méthode de Cardan

On considère deux complexes non nuls p et q, ainsi que l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \qquad z^3 + pz + q = 0$$

On considère aussi l'équation (P) suivante d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(P) : \qquad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Soit U et V les racines complexes de (P). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1) Justifier que $UV = -\dfrac{p^3}{27}$ et $U + V = -q$.

Comme U et V sont les racines de $Z^2 + qZ - \dfrac{p^3}{27}$, on a

$$\boxed{UV = -\frac{p^3}{27}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{U + V = -q}$$

2) Dans cette question uniquement, on suppose $U = 2 + 2i$. Déterminer toutes les valeurs possibles de u.

On a :

$$\begin{aligned} U &= 2 + 2i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, les racines cubiques de U sont

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}}$$

3) Montrer que $u \neq 0$. Dans la suite du problème, on pose $v = \dfrac{-p}{3u}$.

Supposons par l'absurde que $u = 0$. Alors $U = u^3 = 0$. Ainsi,

$$UV = -\frac{p^3}{27} = 0$$

donc $p = 0$, ce qui est une contradiction. Finalement, $\boxed{u \neq 0}$.

4) Calculer u^3v^3. En déduire que $v^3 = V$.

On a

$$u^3v^3 = u^3\left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} = UV = u^3V$$

Comme $U = u^3 \neq 0$, on peut diviser par u^3 : on obtient $\boxed{v^3 = V}$.

5) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

Par la question 1 et la question 4, on a $u^3 + v^3 = U + V = \boxed{-q}$

6) Montrer que $u + v$ est solution de (E).

On substitue z par $u + v$ dans (E) :

$$\begin{aligned} &(u+v)^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q \\ &= U + V + 3uv(u+v) + p(u+v) + q \\ &= -q + (3uv + p)(u+v) + q \\ &= \left(3u \times \left(-\frac{p}{3u}\right) + p\right)(u+v) \\ &= 0 \times (u+v) = 0 \end{aligned}$$

Finalement, $u + v$ est solution de (E).

7) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont aussi solutions de (E).

Montrons que $ju + j^2v$ est une solution de (E). Comme $j^3 = e^{2i\pi} = 1$, on a

$$\begin{aligned} &(ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= (ju)^3 + 3(ju)^2j^2v + 3ju(j^2v)^2 + (j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= j^3u^3 + 3j^4u^2v + 3j^5uv^2 + j^6v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= U + V + 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) + q \\ &= -q + (3uv + p)(ju + j^2v) + q \\ &= 0 \times (ju + j^2v) = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat. Montrons maintenant que $j^2u + jv$ est une solution de (E).

$$
\begin{aligned}
&(j^2u+jv)^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=(j^2u)^3+3(j^2u)^2jv+3j^2u(jv)^2+(jv)^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=j^6u^3+3j^5u^2v+3j^4uv^2+j^3v^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=u^3+3j^2u^2v+3juv^2+v^3+p(j^2u+jv)+q\\
&=U+V+3uv(j^2u+jv)+p(j^2u+jv)+q\\
&=-q+(3uv+p)(j^2u+jv)+q\\
&=0\times(j^2u+jv)=0
\end{aligned}
$$

Finalement, j^2u+jv est une solution de (E).

8) Application 1 : on prend $p=-3$ et $q=1$.

a) Calculer une des valeurs possibles pour chacun des complexes U, V, u et v. *Quel que soit le choix réalisé pour chaque complexe, cela conduira au même résultat pour la question suivante.*

U et V sont les racines de

$$Z^2+1\times Z-\frac{(-3)^3}{27}=Z^2+Z+1$$

Le discriminant est $\Delta=1-4=-3$. Les racines sont donc

$$Z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\text{ et }Z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

On remarque que $Z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2=\overline{Z_1}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, on peut prendre

$$U=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\boxed{j}\qquad V=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\boxed{j^2}$$

Comme u est une racine cubique de U, on peut par exemple prendre

$$u=\boxed{e^{\frac{2i\pi}{9}}}$$

Pour cette valeur de u, on a alors

$$v=\frac{-p}{3u}=\frac{1}{u}=\boxed{e^{-\frac{2i\pi}{9}}}$$

b) En déduire les solutions de $z^3-3z+1=0$.

Par les questions précédentes, on a donc 3 racines de z^3-3z+1 :

$$z_1=u+v=e^{\frac{2i\pi}{9}}+e^{-\frac{2i\pi}{9}}=\boxed{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}$$

Pour z_2, on remarque que $v=\overline{u}$ et $j^2=\overline{j}$, si bien que

$$
\begin{aligned}
z_2&=ju+j^2v=ju+\overline{ju}=2\mathrm{Re}(ju)\\
&=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{\frac{2i\pi}{9}}\right)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{8i\pi}{9}}\right)\\
&=\boxed{2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)}\quad\left(=-2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Pour z_3, on remarque que $jv=\overline{j^2u}$, si bien que

$$
\begin{aligned}
z_3&=j^2u+jv=j^2u+\overline{j^2u}=2\mathrm{Re}(j^2u)\\
&=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{4i\pi}{3}}e^{\frac{2i\pi}{9}}\right)=2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{14i\pi}{9}}\right)\\
&=\boxed{2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)}\quad\left(=-2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)
\end{aligned}
$$

2) Application 2 : on cherche les solutions de l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{C}$

$$(EQ):\qquad x^3+(6+3i)x^2+(6+12i)x-3+8i=0$$

a) On pose $z=x+a$ avec $a\in\mathbb{C}$. Trouver a tel que z vérifie une équation de la forme $z^3+pz+q=0$. Déterminer p et q.

Avec $x=z-a$, on a

$$
\begin{aligned}
0&=x^3+(6+3i)x^2+(6+12i)x-3+8i\\
&=(z-a)^3+(6+3i)(z-a)^2+(6+12i)(z-a)-3+8i\\
&=z^3-3az^2+3a^2z-a^3+(6+3i)(z^2-2az+a^2)\\
&\quad+(6+12i)(z-a)-3+8i\\
&=z^3+(-3a+6+3i)\,z^2+\left(3a^2-12a-6ai+6+12i\right)z\\
&\quad-a^3+(6+3i)a^2-a(6+12i)-3+8i
\end{aligned}
$$

Le coefficient en z^2 s'annule si et seulement si

$$-3a+6+3i=0\iff-a+2+i=0\iff\boxed{a=2+i}$$

Pour cette valeur de a, on a donc

$$z^3+pz+q=0$$

avec

$$\begin{aligned} p &= 3a^2 - 12a - 6ai + 6 + 12i \\ &= 3\left[(2+i)^2 - 4(2+i) - 2(2+i)i + 2 + 4i\right] \\ &= 3\left[4 + 4i - 1 - 8 - 4i - 4i - 2i^2 + 2 + 4i\right] \\ &= 3\left[4 - 1 - 8 + 4\right] \\ &= \boxed{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= -a^3 + (6+3i)a^2 - a(6+12i) - 3 + 8i \\ &= -(2+i)^3 + 3(2+i)(2+i)^2 - 6(2+i)(1+2i) - 3 + 8i \\ &= 2(2+i)^3 - 6(2 + 4i + i - 2) - 3 + 8i \\ &= 2\left(8 + 3\times 4i + 3\times 2i^2 + i^3\right) - 6\times 5i - 3 + 8i \\ &= 2\left(2 + 12i - i\right) - 3 - 22i \\ &= 4 + 22i - 3 - 22i \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

b) Résoudre (EQ).

On cherche les racines de $z^3 + pz + q$ avec $p = -3$ et $q = 1$. On cherche donc les racines du polynôme $z^3 - 3z + 1 = 0$. Or, par la question 8.b), ces racines sont :

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \qquad z_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \qquad z_3 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

Or, par la question 9.a), pour tout $x \in \mathbb{C}$, x est solution de (EQ) si et seulement si $x + a$ est racine de $z^3 - 3z + 1 = 0$. Ainsi, les solutions de (EQ) sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - a, \quad 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) - a, \quad 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) - a\right\}}$$

Exercice 3 — Sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \cos(ak+b) \qquad \text{et} \qquad T_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \sin(ak+b)$$

Partie I — Une formule fondamentale et ses conséquences

1) Calculer $S_n(a,b)$ et $T_n(a,b)$ lorsque $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Comme $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k'\pi$ (la lettre k sera déjà prise dans la somme !). Donc :

$$\begin{aligned} S_n(a,b) &= \sum_{k=0}^{n} \cos(2k'\pi k + b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \cos(b) \qquad (\text{car } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\ &= \boxed{(n+1)\cos(b)} \end{aligned}$$

De même

$$T_n(a,b) = \boxed{(n+1)\sin(b)}$$

2) On suppose dans cette question que $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Calculer $S_n(a,b) + i\,T_n(a,b)$, puis établir que

$$S_n(a,b) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\cos\left(\frac{na}{2} + b\right)$$

$$T_n(a,b) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\sin\left(\frac{na}{2} + b\right)$$

$$\begin{aligned} S_n(a,b) + i\,T_n(a,b) &= \sum_{k=0}^{n} \left[\cos(ak+b) + i\,\sin(ak+b)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{i\,(ak+b)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{i\,ak} e^{i\,b} \\ &= e^{i\,b} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\,a}\right)^k \end{aligned}$$

Comme $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\,a} \neq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n(a,b) + i\,T_n(a,b) &= e^{i\,b} \times \frac{1-(e^{i\,a})^{n+1}}{1-e^{i\,a}} \\
&= e^{i\,b} \times \frac{1-e^{i\,(n+1)a}}{1-e^{i\,a}} \\
&= e^{i\,b} \times \frac{e^{i\,\frac{(n+1)a}{2}}\left(e^{-i\,\frac{(n+1)a}{2}} - e^{i\,\frac{(n+1)a}{2}}\right)}{e^{i\,\frac{a}{2}}\left(e^{-i\,\frac{a}{2}} - e^{i\,\frac{a}{2}}\right)} \\
&= e^{i\,b} \times e^{i\,\frac{na}{2}} \times \frac{-2i\,\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{-2i\,\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\
&= e^{i\left(\frac{na}{2}+b\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
S_n(a,b) &= \mathrm{Re}(S_n(a,b) + i\,T_n(a,b)) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{n}{2}a+b\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{na}{2}+b\right)}\right) \\
&= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{na}{2}+b\right)}
\end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned}
T_n(a,b) &= \mathrm{Im}\,(S_n(a,b) + i\,T_n(a,b)) \\
&= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{na}{2}+b\right)}
\end{aligned}$$

b) Retrouver la formule de $S_n(a,b)$ sans utiliser les nombres complexes, en transformant l'expression $2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos(ak+b)$ par une formule trigonométrique.

On a :

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{a}{2}\right) S_n(a,b) \\
=&\sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos(ak+b) \\
=&\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left(\frac{a}{2}+ak+b\right)+\sin\left(\frac{a}{2}-(ak+b)\right)\right] \\
=&\sum_{k=0}^{n}\sin\left(ak+\frac{a}{2}+b\right)+\sum_{k=0}^{n}\sin\left(-ak+\frac{a}{2}-b\right) \\
=&T_n\left(a,\frac{a}{2}+b\right)+T_n\left(-a,\frac{a}{2}-b\right) \\
=&\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\times\sin\left(\frac{na}{2}+\frac{a}{2}+b\right) \\
&+\frac{\sin\left(-\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{a}{2}\right)}\times\sin\left(-\frac{na}{2}+\frac{a}{2}-b\right) \\
=&\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\times\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}+b\right) \\
&+\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\times\sin\left(\frac{(-n+1)a}{2}-b\right) \\
=&\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\times\left[\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}+b\right)+\sin\left(\frac{(-n+1)a}{2}-b\right)\right]
\end{aligned}$$

Or, pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

D'où avec $p = \frac{(n+1)a}{2}+b$ et $q = \frac{(-n+1)a}{2}-b$, on a :

$$\frac{p+q}{2} = \frac{a}{2} \qquad \frac{p-q}{2} = \frac{na}{2}+b$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}+b\right)+\sin\left(\frac{(-n+1)a}{2}-b\right) \\
=&2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{na}{2}+b\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}&2\sin\left(\frac{a}{2}\right) S_n(a,b)\\ =&\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{na}{2}+b\right)\end{aligned}$$

de sorte qu'en divisant par $2\sin\left(\frac{a}{2}\right)$, qui est non nul (car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$), on trouve le résultat voulu.

Autre méthode : on peut simplifier le calcul ainsi :

$$\begin{aligned}&2\sin\left(\frac{a}{2}\right) S_n(a,b)\\ =&\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left(\frac{a}{2}+ak+b\right)+\sin\left(\frac{a}{2}-(ak+b)\right)\right]\\ =&\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left(ka+\frac{a}{2}+b\right)-\sin\left(ka-\frac{a}{2}+b\right)\right]\\ =&\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left((k+1)a-\frac{a}{2}+b\right)-\sin\left(ka-\frac{a}{2}+b\right)\right]\\ =&\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) \qquad \text{avec } u_k=\sin\left(ka-\frac{a}{2}+b\right)\\ =&\, u_{n+1}-u_0 \qquad \text{par télescopage}\\ =&\sin\left((n+1)a-\frac{a}{2}+b\right)-\sin\left(-\frac{a}{2}+b\right)\\ =&\sin p+\sin q \qquad \text{avec } \begin{cases}p=\left(n+\frac{1}{2}\right)a+b\\ q=\frac{a}{2}-b\end{cases}\\ =&\,2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ =&\,2\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)\cos\left(\frac{na}{2}+b\right)\end{aligned}$$

et on conclut de la même façon.

3) Soit $n \geqslant 2$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Linéariser $\cos^3\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta)&=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\\ &=\frac{1}{8}\left(e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}\right)\\ &=\frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta)+3\times 2\cos(\theta)\right)\\ &=\boxed{\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta}\end{aligned}$$

b) En déduire la valeur de la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n-1}\cos^3\left(b+\frac{2k\pi}{n}\right)$.

On discutera selon la valeur de n.

$$\begin{aligned}C_n=&\sum_{k=0}^{n-1}\cos^3\left(b+\frac{2k\pi}{n}\right)\\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{4}\cos\left(3b+\frac{6k\pi}{n}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(b+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\\ =&\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{6\pi}{n}k+3b\right)+\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2\pi}{n}k+b\right)\\ =&\frac{1}{4}S_{n-1}\left(\frac{6\pi}{n},3b\right)+\frac{3}{4}S_{n-1}\left(\frac{2\pi}{n},b\right)\end{aligned}$$

On disjoint les cas :

- Si $n \neq 3$, alors $\frac{6\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et par ailleurs comme $n \geqslant 2$ on a $\frac{2\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, par la question **a)**

$$\begin{aligned}C_n=&\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\times\frac{6\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{6\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\frac{6\pi}{n}}{2}+3b\right)\\ &+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\times\frac{2\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\frac{2\pi}{n}}{2}+b\right)\end{aligned}$$

Or,

$$\sin\left(\frac{n\times\frac{6\pi}{n}}{2}\right)=\sin(3\pi)=0$$

$$\sin\left(\frac{n\times\frac{2\pi}{n}}{2}\right)=\sin\pi=0$$

Ainsi, dans ce cas,

$$C_n = \boxed{0}$$

- Si $n = 3$, alors $\dfrac{6\pi}{n} = 2\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\dfrac{2\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Par la question **a)** ,

$$\begin{aligned} C_n &= n\cos(b) + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\times\frac{2\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\frac{2\pi}{n}}{2}+b\right) \\ &= 3\cos(b) + 0 \qquad \text{car } \sin(\pi) = 0 \\ &= \boxed{3\cos(b)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$C_n = \begin{cases} 3\cos(b) & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{si } n \neq 3 \end{cases}$$

Partie II — Noyaux de Dirichlet et de Fejér

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et x un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k(x) = \sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

4) Montrer que $D_k(x)$ est réel et que

$$D_k(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{k}\cos(jx) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On a

$$\begin{aligned} D_k(x) &= e^{i(-k)x} + e^{i(-k+1)x} + \ldots + e^{-ix} \\ &\quad + 1 + e^{ix} + \ldots + e^{ikx} \\ &= 1 + (e^{ix} + e^{-ix}) + \ldots + (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= 1 + 2\cos(x) + \ldots + 2\cos(kx) \\ &= \boxed{1 + 2\sum_{j=1}^{k}\cos(jx)} \end{aligned}$$

En particulier, $D_k(x)$ est un réel puisque tous les termes de cette somme sont réels. Enfin, par la question **a)** , comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k}\cos(jx) &= S_k(x,0) - 1 \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{kx}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_k(x) &= 1 + 2\left(\frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{kx}{2}\right) - 1\right) \\ &= -1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times 2\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, on sait que pour tous réels p, q :

$$2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

donc

$$2\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} D_k(x) &= -1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}} \end{aligned}$$

5) En utilisant un résultat de la partie I, montrer que

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(kx+\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)} T_{n-1}\left(x,\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, par la question 1.**a)** :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}+\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2} \end{aligned}$$

6) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n\right)$$

On remarque que, par la question précédente, on a

$$nF_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et donc $\frac{1}{2}\left(nF_n(x)-n\right)$ est le second membre de la relation voulue.

Or,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(nF_n(x)-n\right) \\ =&\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) - n\right) \\ =&\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+2\sum_{j=1}^{k}\cos(jx)\right) - n\right) \\ =&\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\cos(jx) - n\right) \\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\cos(jx) \\ =&\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\cos(jx) \\ =&\sum_{j=1}^{n-1}\cos(jx)\sum_{k=j}^{n-1} 1 \\ =&\sum_{j=1}^{n-1}\cos(jx)(n-1-j+1) \\ =&\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jx) \end{aligned}$$

On a donc démontré le résultat voulu.

7) En déduire une expression de $\sum_{j=1}^{n-1} j\cos(jx)$.

On remarque que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jx) \\ &= n\sum_{j=1}^{n-1}\cos(jx) - \sum_{j=1}^{n-1} j\cos(jx) \end{aligned}$$

D'où par la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} j\cos(jx)\\
&= n\sum_{j=1}^{n-1}\cos(jx) - \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jx)\\
&= \frac{n}{2}\left(D_{n-1}(x)-1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n\right)\\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n\right)\\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \boxed{\frac{n\sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

8) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cos(jy) \geqslant -\frac{1}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cos(jy)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jy)
\end{aligned}$$

On disjoint les cas.

- Si $y \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on peut uiliser la question **6)** pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jy)\\
&\geqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n\right)\\
&\geqslant \frac{1}{2n}\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\\
&\geqslant -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  car $\dfrac{1}{2n}\dfrac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant 0$.
- Si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cos(jy) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \geqslant 0$$

Dans tous les cas, on a bien le résultat voulu.