MPSI

DS de mathématiques n°2

10/10/2026

Sommes, trigonométrie, nombres complexes, fonctions réelles

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. La **clarté** de la copie fera varier la note de **±1 point**.
Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.
Les questions simples ou utilisant une méthode classique doivent être traitées rapidement, sans perdre de temps au brouillon ! 107,5

Exercice 1 — Calcul de sommes binomiales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{2k} \qquad \text{et} \qquad S'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

On pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1}$$

1) Calculer U_n et V_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$. Que peut-on conjecturer ?

2) **a)** Rappeler (sans la démontrer) la formule de symétrisation du coefficient binomial.

b) En déduire, grâce au changement d'indice $j = n - k$ dans U_n, que $U_n = V_n$.

3) **a)** Écrire U_n et V_n sous forme développée, en faisant apparaître leurs trois premiers et leurs deux derniers termes.

b) En déduire que $U_n + V_n = 2^{2n-1}$.

4) En déduire U_n et V_n en fonction de n.

5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \cdots, m\}$. Montrer que $j\binom{m}{j} = \alpha_m \binom{m-1}{j-1}$, avec α_m un réel qui dépend uniquement de m que l'on précisera.

6) En déduire que $S_n = nV_n$, puis la valeur de S_n. *On pourra exprimer le résultat en fonction d'un réel α_m avec une valeur de m bien choisie si l'expression de α_m n'a pas été trouvée en question précédente.*

7) **a)** Rappeler (sans la démontrer) la formule du triangle de Pascal.

b) En retirant un terme de la somme de U_n et un terme de la somme de V_n, en déduire que $S'_n = U_n + V_n$, puis la valeur de S'_n.

Exercice 2 — Méthode de Cardan

On considère deux complexes non nuls p et q, ainsi que l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \qquad z^3 + pz + q = 0$$

On considère aussi l'équation (P) suivante d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(P) : \qquad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Soit U et V les racines complexes de (P). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1) Justifier que $UV = -\dfrac{p^3}{27}$ et $U + V = -q$.

2) Dans cette question uniquement, on suppose $U = 2 + 2i$. Déterminer toutes les valeurs possibles de u.

3) Montrer que $u \neq 0$. Dans la suite du problème, on pose $v = \dfrac{-p}{3u}$.

4) Calculer u^3v^3. En déduire que $v^3 = V$.

5) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

6) Montrer que $u + v$ est solution de (E).

7) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont aussi solutions de (E).

8) Application 1 : on prend $p = -3$ et $q = 1$.

a) Calculer une des valeurs possibles pour chacun des complexes U, V, u et v. *Quel que soit le choix réalisé pour chaque complexe, cela conduira au même résultat pour la question suivante.*

b) En déduire les solutions de $z^3 - 3z + 1 = 0$.

9) Application 2 : on cherche les solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$(EQ) : \qquad x^3 + (6 + 3i)x^2 + (6 + 12i)x - 3 + 8i = 0$$

a) On pose $z = x + a$ avec $a \in \mathbb{C}$. Trouver a tel que z vérifie une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$. Déterminer p et q.

b) Résoudre (EQ).

Exercice 3 — Sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \cos(ak + b) \qquad \text{et} \qquad T_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \sin(ak + b)$$

Partie I — Une formule fondamentale et ses conséquences

1) Calculer $S_n(a, b)$ et $T_n(a, b)$ lorsque $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2) On suppose dans cette question que $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Calculer $S_n(a, b) + i\,T_n(a, b)$, puis établir que

$$S_n(a,b) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \cos\left(\frac{na}{2} + b\right)$$

$$T_n(a,b) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \sin\left(\frac{na}{2} + b\right)$$

b) Retrouver la formule de $S_n(a,b)$ sans utiliser les nombres complexes, en transformant l'expression $2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos(ak+b)$ par une formule trigonométrique.

3) Soit $n \geqslant 2$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Linéariser $\cos^3\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

b) En déduire la valeur de la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3\left(b + \frac{2k\pi}{n}\right)$. On discutera selon la valeur de n.

Partie II — Noyaux de Dirichlet et de Fejér

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et x un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k(x) = \sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

4) Montrer que $D_k(x)$ est réel et que

$$D_k(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

5) En utilisant un résultat de la partie I, montrer que

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

6) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos(jx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n\right)$$

7) En déduire une expression de $\sum_{j=1}^{n-1} j\cos(jx)$.

8) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\cos(jy) \geqslant -\frac{1}{2}$$

Blague — Au cours d'une soirée, un homme complexe dit à une femme réelle :
— Tu viens dans $\mathbb{C}$?