

# DS de mathématiques n°8

DL, espaces vectoriels, dimension,

## applications linéaires – Corrigé

Noté sur 103 pts  $\pm 5$  pts pour le soin et la clarté,  
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 1/5.

### /15 1 Pour s'échauffer

1) On pose  $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ . On rappelle que  $\sqrt[3]{u} = u^{1/3}$ .

/1,5 a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

$f(x)$  n'a un sens que si  $\sqrt[3]{1+x}-1 \neq 0$ . Or,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x}-1 &= 0 \\ \iff \sqrt[3]{1+x} &= 1 \\ \iff 1+x &= 1 \\ \iff x &= 0\end{aligned}$$

Ainsi,  $D_f = \mathbb{R}^*$ .

/4 b) Déterminer le DL<sub>2</sub>(0) de  $f$ .

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2}{1 + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)} - 1 \\ &= \frac{x^2}{\frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)} \\ &= 3 \times \frac{x^2}{1 - \frac{x}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)} \\ &= 3 \times \frac{x^2}{1+X}\end{aligned}$$

avec  $X = -\frac{x}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 \times \left(1 - X + \underset{X \rightarrow 0}{o}(X)\right) \\ &= 3x^2 \times \left(1 + \frac{x}{3} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)\right) \\ &= \boxed{3x^2 + x^3 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)}\end{aligned}$$

/2

c) En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de  $f(0)$ . Montrer que  $f$  ainsi prolongée est dérivable en 0 et préciser la valeur de  $f'(0)$ .

Par le DL qui précède, on a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $\boxed{f(0) = 0}$ .

Comme  $f$  admet un DL<sub>1</sub>(0),  $f$  est dérivable en 0 et d'après le DL,  $\boxed{f'(0) = 3}$ .

/2,5

d) Préciser la position relative de  $f$  par rapport à sa tangente en 0. Est-ce que  $f$  admet un extremum local en 0?

La tangente de  $f$  en 0 est la droite d'équation  $y = 3x$ . De plus,

$$f(x) - 3x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

Comme  $x^2$  est positif,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Comme  $f'(0) \neq 0$ , 0 n'est pas un point critique de  $f$ . Comme 0 est un point intérieur de  $D_f$ , ce n'est donc pas un extremum local de  $f$ .

/5

2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right)$

Soit  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$ .

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - x^2}{x^2 \operatorname{sh}^2 x}$$

D'une part,  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $x^2 \operatorname{sh}^2 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 x^2 = x^4$ . D'autre part,

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 x - x^2 &= \left( x + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right)^2 - x^2 \\ &= x^2 + \frac{x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) - x^2 \\ &= \frac{x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{3} \end{aligned}$$

On en déduit par quotient d'équivalent que

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

## /19,5 2 Autour des DL de la fonction tangente

- 1) Justifier que tangente admet un DL à l'ordre 7 en 0 et que ce DL est de la forme :

$$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$$

/4 avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- 1,5 pour la justification de l'existence du  $DL_7(0)$ .
- 1 pour l'utilisation de l'imparité de tangente.
- 1,5 pour justifier que le coefficient de degré 1 du DL est 1.

La fonction tangente est de classe  $\mathcal{C}^7$ , donc par la formule de Taylor-Young, elle admet un  $DL_7(0)$ . De plus, tangente est impaire, donc son  $DL_7(0)$  est impair. On en déduit que

$$\tan x = dx + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Montrons enfin que  $d = 1$ . On sait que  $d = \tan'(0)$ . Or,  $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$ . D'où la forme voulue.

(Pour justifier que  $d = 1$ , on pouvait aussi invoquer le fait que  $\tan x \sim x$ , de sorte que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ , ce qui donne  $d = 1$  grâce à la relation ci-dessus)

Dans la suite, on propose de calculer le DL à l'ordre 7 en 0 de la fonction

tangente de plusieurs façons.

- 2) a) En utilisant la question 1), exprimer la forme du DL à l'ordre 6 en 0 de  $1 + \tan^2(x)$  en fonction des réels  $a, b, c$ .

/2,5

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= 1 + \left( x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \right)^2 \\ &= 1 + x^2 + a^2 x^6 + 2ax^4 + 2bx^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \\ &= \boxed{1 + x^2 + 2ax^4 + (a^2 + 2b)x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)} \end{aligned}$$

/2,5

- b) En déduire une autre expression du DL à l'ordre 7 en 0 de  $\tan(x)$  en fonction des réels  $a, b, c$ .

On intègre terme à terme le DL de  $1 + \tan^2 x$  :

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2a}{5}x^5 + \frac{(a^2 + 2b)}{7}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \\ &= \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2a}{5}x^5 + \frac{(a^2 + 2b)}{7}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)} \end{aligned}$$

/2,5

- c) En déduire  $a, b$  et  $c$ . Conclure.

En plus de la question précédente, on sait que

$$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$$

Par unicité du DL, on en déduit que :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2a}{5} \\ c = \frac{a^2 + 2b}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{15} \\ c = \frac{\frac{1}{9} + \frac{4}{15}}{7} = \frac{17}{315} \end{cases}$$

Finalement, le  $DL_7(0)$  de tangente est :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)}$$

- 2) Dans cette question, pour éviter des calculs trop lourds, on ne déter-

minera que le DL à l'ordre 5 en 0 de tangente.

/5

a) Calculer le DL à l'ordre 6 en 0 de  $\ln(\cos x)$ .

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)\right) \\ &= \ln(1 + X)\end{aligned}$$

avec  $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Alors

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln(1 + X) \\ &= X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o_{X \rightarrow 0}(X^3) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o_{x \rightarrow 0}(x^6) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{x^6}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \left(-\frac{1}{24 \times 5 \times 6} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{2} - 1\right)x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{16}{24 \times 30}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6) \\ &= \boxed{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{90}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)}\end{aligned}$$

/3

b) Conclure.

On remarque que la dérivée de  $f : x \mapsto \ln(\cos x)$  est  $f' : x \mapsto -\frac{\sin x}{\cos x}$ , i.e.  $f' = -\tan$ . Comme  $\tan$  admet un  $\text{DL}_5(0)$ , il en va de même pour  $f'$  et on peut l'obtenir en dérivant le  $\text{DL}_6(0)$  de  $f$  :

$$-\tan x = -x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

donc

$$\tan x = \boxed{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)}$$

### 3 Morphismes dont le noyau et l'image sont supplémentaires

/43,5

On s'intéresse au problème suivant : étant donné  $E$  un espace vectoriel de dimension finie notée  $n$ , on s'intéresse aux applications  $f \in \mathcal{L}(E)$  qui vérifient la condition suivante notée (S) :

$$(S) \quad E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

Le but de l'exercice est d'étudier des cas particuliers.

1) Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Que représentent  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$ ? En déduire si  $p$  vérifie ou non la condition (S).

/1,5

$\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont les éléments caractéristiques de  $p$ . Par définition d'un projecteur, ces deux espaces sont supplémentaires. Donc  $p$  vérifie (S)

2) Justifier qu'une symétrie  $s$  de  $E$  vérifie toujours la condition (S).

/3

Comme  $s$  est une symétrie,  $s$  est un automorphisme. En particulier,  $s$  est injective donc  $\text{Ker}(s) = \{0_E\}$ , et  $s$  est surjective donc  $\text{Im } s = E$ . Ainsi,  $\text{Ker}(s)$  et  $\text{Im}(s)$  sont supplémentaires car  $\{0_E\} \cap E = \{0_E\}$  et  $\{0_E\} + E = E$ . D'où  $s$  vérifie la condition (S).

3) Dans cette question,  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $f$  est l'endomorphisme défini par  $f(P) = P'$ . Montrer que  $f$  ne vérifie pas la condition (S).

/3

(Par le théorème du rang, on sait que  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim \mathbb{R}_2[X]$ , donc pour prouver que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  ne sont pas supplémentaires, on doit nécessairement avoir  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0\}$ . On va donc chercher un polynôme non nul de  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ , ce qui n'est pas dur à trouver...)

On pose  $Q = 1$ . Montrons que  $Q \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ .

- Comme  $Q' = 0$ , on a bien  $Q \in \text{Ker } f$
- Comme  $Q = f(X)$ , on a bien  $Q \in \text{Im } f$ .

Ainsi,  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \neq \{0\}$ . On en conclut que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  ne sont pas en somme directe, donc ne sont pas supplémentaires.

4) Dans cette question,  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $f : E \rightarrow E$  est l'application définie par  $f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$ .

/3,5

a) Justifier que  $f$  est bien définie et montrer que  $f$  est linéaire.

Étant donné  $P \in E$ , on a  $\deg P \leq 3$ . Par suite :

$$\begin{aligned} \deg(XP') &= \deg X + \deg P' \\ &\leq 1 + \deg P - 1 \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \deg((X^2 - 1)P'') &= \deg(X^2 - 1) + \deg P'' \\ &\leq 2 + \deg P - 2 \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(P)$  est la somme de polynômes de degré au plus 3. D'où  $f(P)$  est un polynôme et  $\deg(f(P)) \leq 3$ . Ainsi,  $f(P) \in E$ .

Montrons que  $f$  est linéaire. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $P, Q \in E$ . On a donc

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= \frac{1}{2}(X^2 - 1)(\alpha P + \beta Q)'' - X(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q) \\ &= \frac{1}{2}(X^2 - 1)(\alpha P'' + \beta Q'') - X(\alpha P' + \beta Q') + (\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha \left( \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P \right) + \beta \left( \frac{1}{2}(X^2 - 1)Q'' - XQ' + Q \right) \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

/1,5

- b) Déterminer explicitement l'image par  $f$  du polynôme  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

On a

$$f(1) = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$f(X) = -X + X = 0$$

$$f(X^2) = (X^2 - 1) - 2X^2 + X^2 = -1$$

$$\begin{aligned} f(X^3) &= \frac{1}{2}(X^2 - 1) \times 6X - 3X^3 + X^3 \\ &= X^3 - 3X \end{aligned}$$

Ainsi, par linéarité :

$$\begin{aligned} f(P) &= af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) \\ &= \boxed{aX^3 - 3aX - b + d} \end{aligned}$$

/3

- c) Déterminer le noyau de l'application  $f$ . Montrer qu'il est de dimension 2.

Avec  $P$  défini à la question précédente :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker } f &\iff f(P) = 0 \\ &\iff aX^3 - 3aX - b + d = 0 \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = d \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \left\{ aX^3 + bX^2 + cX + d \in E \mid a = 0, b = d \right\} \\ &= \left\{ dX^2 + cX + d \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}(X^2 + 1, X) \end{aligned}$$

La famille  $(X^2 + 1, X)$  engendre donc  $\text{Ker } f$ , et est libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, c'est une base de  $\text{Ker } f$  :  $\dim \text{Ker } f = 2$ .

/3

- d) Préciser la dimension de l'image de  $f$ , puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.

Par le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f = 4 - 2 = \boxed{2}$$

Ensuite, on sait que

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) \\ &= \text{Vect}(1, 0, -1, X^3 - 3X) \\ &= \text{Vect}(1, X^3 - 3X) \quad \text{car } -1 = (-1) \times 1 \end{aligned}$$

Par le même argument que précédemment, la famille  $(1, X^3 - 3X)$  est une base de  $\text{Im } f$ .

/1,5

e) On note  $G = \{Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Montrons que  $G$  est un s.e.v. de  $E$ .

- Le polynôme  $Q = 0$  vérifie bien  $Q'(1) = Q'(-1) = 0$ , donc  $0 \in G$ .
- Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $P, Q \in G$ . Montrons que  $\alpha P + \beta Q \in G$ .

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)'(1) &= \alpha P'(1) + \beta Q'(1) \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, on montre que  $(\alpha P + \beta Q)'(-1) = 0$ . D'où  $\alpha P + \beta Q \in G$ .

Finalement,  $G$  est un s.e.v. de  $E$ .

/4

f) On pose  $F = \text{Vect}(X, X^2)$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. En déduire que  $\dim G \leq 2$ .

Montrons que  $F \cap G = \{0\}$ . Soit  $P \in F \cap G$ . Montrons que  $P = 0$ . Comme  $P \in F$ , il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $P = \lambda X + \mu X^2$ . Comme  $P \in G$  et  $P' = \lambda + 2\mu X$ , on a

$$\begin{aligned} P'(1) &= \lambda + 2\mu = 0 \\ P'(-1) &= \lambda - 2\mu = 0 \end{aligned}$$

On en déduit facilement que  $\lambda = \mu = 0$ . D'où  $\boxed{P=0}$ . Ainsi,  $F$  et  $G$  sont en somme directe. On en déduit que

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Or, par des arguments déjà vus, on sait que  $\dim F = 2$ . De plus,

$$\dim(F \oplus G) \leq \dim E = 4$$

d'où

$$\dim G = \dim(F \oplus G) - \dim F \leq 4 - 2 = \boxed{2}$$

/4

g) Montrer que  $\text{Im } f \subset G$ . En déduire que  $G = \text{Im}(f)$ .

Montrons que  $\text{Im } f \subset G$ .

- On pose  $Q = 1$ . Il est clair que  $Q'(1) = Q'(-1) = 0$ , donc  $1 \in G$ .
- On pose  $Q = X^3 - 3X$ . Il est clair que  $Q'(1) = Q'(-1) = 0$ , donc  $X^3 - 3X \in G$ .

On en déduit que  $\text{Vect}(1, X^3 + 3X) \subset G$ , donc  $\text{Im } f \subset G$  par la question **d**).

Comme  $\text{Im } f \subset G$  et que  $\dim \text{Im } f = 2$ , on a  $\dim G \geq 2$ . Comme  $\dim G \leq 2$  par la question précédente, on a donc  $\dim G = 2$ . De plus, comme  $\text{Im } f \subset G$  et qu'il y a égalité des dimensions, on en déduit que

/4

h) Montrer (sans utiliser la question suivante...) que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires.

On a vu en questions **c**) et **d**) que

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim E$$

Pour conclure, il suffit de montrer que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ . Soit  $P \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ . Comme  $P \in \text{Ker } f$ , par la question **c**) , il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$P = a(X^2 + 1) + bX$$

Comme  $P \in \text{Im } f$ , on a  $P \in G$ , donc

$$P'(1) = 2a + b = 0$$

$$P'(-1) = -2a + b = 0$$

d'où on trouve facilement  $a = b = 0$ . Ainsi,  $P = 0$ . Finalement,  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires.

/3

i) Montrer que  $f$  est en fait un projecteur.

Comme  $f$  est linéaire, il suffit de montrer que  $f \circ f = f$ . Soit

$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$ . Par la question **b**),

$$f(f(P)) = f(aX^3 - 3aX - b + d)$$

$$= f(AX^3 + BX^2 + CX + D) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = a \\ B = 0 \\ C = -3a \\ D = -b + d \end{cases}$$

$$= AX^3 - 3AX - B + D$$

$$= aX^3 - 3aX - 0 - b + d$$

$$= f(P)$$

D'où  $f \circ f = f$  par arbitraire sur  $P$ .

5) On note enfin  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application définie par  $f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y)$ .

a) Déterminer le noyau et l'image de  $f$  (on donnera la dimension et une base à chaque fois).

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

$$(x, y, z, t) \in \text{Ker } f \iff \begin{cases} -3y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z, y = 0\} \\ &= \{(z, 0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Par des arguments déjà vus, la famille  $((1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$  est une base de  $\text{Ker } f$ , qui est donc de dimension 2. On détermine maintenant  $\text{Im } f$  :

$$f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 3, 0) \quad f(0, 1, 0, 0) = (0, -3, 0, 1)$$

$$f(0, 0, 1, 0) = (0, 0, -3, 0) \quad f(0, 0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, 0_{\mathbb{R}^4} \right) \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que la famille  $((0, -3, 0, 1), (0, 0, 3, 0))$  est une base de  $\text{Im } f$ , qui est donc de dimension 2.

/3

b) Vérifier que  $f$  satisfait la condition (S).

Comme

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

il suffit de vérifier que  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ . Soit  $u = (x, y, z, t) \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ . Comme  $u \in \text{Im } f$ , on a

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\lambda \\ 3\mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Comme  $u \in \text{Ker } f$ , on a

$$\begin{aligned} f(u) &= 0_{\mathbb{R}^4} \\ \implies f(0, -3\lambda, 3\mu, \lambda) &= 0_{\mathbb{R}^4} \\ \implies (0, 9\lambda, -3\mu, -3\lambda) &= 0_{\mathbb{R}^4} \\ \implies \lambda = \mu = 0 \end{aligned}$$

D'où  $u = 0_{\mathbb{R}^4}$ . Ainsi,  $f$  vérifie la condition (S).

/2,5

c) Montrer toutefois que  $f$  n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

Comme  $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ , on en déduit que  $f$  n'est pas injective. Ce n'est donc pas un automorphisme. Supposons par l'absurde que  $f$  est un projecteur. Alors  $\text{Im } f = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid f(u) = u\}$ .

Or, on a vu que  $(0, 0, 3, 0) \in \text{Im } f$ . Or,

$$f(0, 0, 3, 0) = (0, 0, -3, 0) \neq (0, 0, 3, 0)$$

Absurde. Donc  $f$  n'est pas un projecteur.

## /25 4 Après l'échauffement...

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ . On suppose que  $p \circ q = q \circ p$ .  
Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur, puis que :

$$\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$$

/11,5

1,5 pour montrer que  $p \circ q$  est un projecteur.

6 points pour l'égalité concernant les noyaux (3,5 pour le sens direct, 2,5 pour le sens réciproque)

4 points pour l'égalité concernant les images (2 pour chaque sens)

- L'application  $p \circ q$  est linéaire par composition. De plus,

$$\begin{aligned}(p \circ q) \circ (p \circ q) &= (p \circ q) \circ (q \circ p) \\ &= p \circ q^2 \circ p \\ &= p \circ (q \circ p) \quad \text{car } q \text{ est un projecteur} \\ &= (p \circ p) \circ q \\ &= p \circ q \quad \text{car } p \text{ est un projecteur}\end{aligned}$$

- Montrons que  $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p \circ q)$ . Soit  $u \in \text{Ker } p + \text{Ker } q$ .  
Montrons que  $p(q(u)) = 0_E$ . Par hypothèse, on a

$$u = u_{Kp} + u_{Kq} \quad \text{avec } u_{Kp} \in \text{Ker } p \quad \text{et} \quad u_{Kq} \in \text{Ker } q$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}p(q(u)) &= p(q(u_{Kp}) + q(u_{Kq})) \\ &= p(q(u_{Kp})) \\ &= q(p(u_{Kp})) \quad \text{car } p \circ q = q \circ p \\ &= q(0_E) \\ &= 0_E\end{aligned}$$

D'où  $u \in \text{Ker}(p \circ q)$ .

- Montrons que  $\text{Ker}(p \circ q) \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q$ . Soit  $u \in \text{Ker}(p \circ q)$ .  
Montrons que

$$\exists a \in \text{Ker } p \quad \exists b \in \text{Ker } q \quad u = a + b$$

On pose

$$u = u_{Kq} + u_{Iq} \quad \text{avec } u_{Kq} \in \text{Ker } q \quad u_{Iq} \in \text{Im } q$$

de sorte que, comme  $\text{Im } q = \{v \in E \mid q(v) = v\}$ ,

$$0_E = p(q(u)) = p(q(u_{Kq}) + q(u_{Iq})) = p(0_E + u_{Iq})$$

On pose ensuite

$$u_{Iq} = v + w \quad \text{avec } v \in \text{Ker } p \quad w \in \text{Im } p$$

On a donc

$$0_E = p(q(u)) = p(u_{Iq}) = p(w) = w$$

D'où  $w = 0_E$ . On en déduit que  $u_{Iq} = v \in \text{Ker } p$ . Ainsi,

$$u = u_{Kq} + u_{Iq} \in \text{Ker } q + \text{Ker } p$$

D'où  $\text{Ker}(p \circ q) \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q$

Finalement, on a montré que  $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

- Montrons que  $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$ . Soit  $u \in \text{Im}(p \circ q)$ .  
Montrons que  $u \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$ . Comme  $p \circ q$  est un projecteur, on a :

$$(p \circ q)(u) = u$$

En particulier,

$$u = p(q(u)) \quad \text{donc } u \in \text{Im } p$$

et comme  $p \circ q = q \circ p$ ,

$$u = q(p(u)) \quad \text{donc } u \in \text{Im } q$$

Ainsi,  $u \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$ .

- Montrons que  $\text{Im } p \cap \text{Im } q \subset \text{Im}(p \circ q)$ . Soit  $u \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$ .  
Montrons que  $u \in \text{Im}(p \circ q)$ , i.e.  $\exists u' \in E \quad u = p(q(u'))$ .  
Comme  $u \in \text{Im } p$ , on a

$$u = p(u)$$

Comme  $u \in \text{Im } q$ , on a

$$u = q(u)$$

Par suite,

$$u = p(u) = p(q(u))$$

D'où en posant  $u' = u$ , on a le résultat voulu.

- 2) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose que

$$E = \text{Ker } f + \text{Ker } g = \text{Im } f + \text{Im } g$$

/6

Montrer que les deux sommes ci-dessus sont des sommes directes.

On pose

$$n = \dim E \quad \begin{cases} a = \dim \text{Ker } f \\ b = \dim \text{Im } f \end{cases} \quad \begin{cases} c = \dim \text{Ker } g \\ d = \dim \text{Im } g \end{cases}$$

Par le théorème du rang, on a

$$n = a + b = c + d$$

De plus, comme  $\text{Ker } f + \text{Ker } g = E$ , par la formule de Grassman :

$$n = a + c - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$$

et de même,

$$n = b + d - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

En additionnant les deux dernières égalités, on obtient :

$$2n = a + b + c + d - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

Or,  $a + b = c + d = n$ , donc

$$0 = -\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

Comme une dimension est toujours positive, on en déduit que

$$\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$$

Ce qui permet de conclure que  $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0_E\}$ , donc  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker } g$  sont en somme directe. Idem pour  $\text{Im } f$  et  $\text{Im } g$ .

- 3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$  l'application qui à un polynôme  $P(X)$  associe  $X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ . Vérifier que  $f$  est bien définie et est une symétrie.

/7,5

Déterminer précisément ses éléments caractéristiques.

- Montrons que  $f$  est bien définie. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Montrons que  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . On pose

$$P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

de sorte que

$$\begin{aligned} f(P) &= X^n \left( a_n \frac{1}{X^n} + \dots + a_1 \frac{1}{X} + a_0 \right) \\ &= a_n + a_{n-1} X + \dots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(P)$  est bien un polynôme, et  $\deg(f(P)) \leq n$ . Ainsi,  $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ .

- Montrons que  $f$  est une symétrie. Comme  $f$  est linéaire, il suffit de montrer que  $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\begin{aligned} f(f(P)) &= f(Q) \quad \text{avec } Q = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^n Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^n \times \left(\frac{1}{X^n} P(X)\right) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

D'où  $f$  est bien une symétrie.

- Les éléments caractéristiques sont, en notant  $\text{id}$  l'identité de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

$$F = \text{Ker}(f - \text{id}) \quad G = \text{Ker}(f + \text{id})$$

Déterminons  $F$  ici. Soit  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ .

$$\begin{aligned} f(P) &= P \\ \iff X^n P\left(\frac{1}{X}\right) &= P(X) \\ \iff a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n &= a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \\ \iff \begin{cases} a_0 = a_n \\ a_1 = a_{n-1} \\ \vdots \\ a_n = a_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad a_k = a_{n-k} \right\}$$

(Par exemple, si  $n = 3$ , alors  $F = \{aX^3 + bX^2 + bX + a \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ )

- Pour  $G$ , on trouve de manière similaire :

$$G = \left\{ a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad a_k = -a_{n-k} \right\}$$

(Par exemple, si  $n = 4$ , alors  $G = \left\{ aX^4 + bX^3 - bX - a \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ )