# TD 9 : Équations différentielles Indications

## Équations différentielles d'ordre 1

**1** ★★☆ (*ED linéaires d'ordre 1*) Résoudre les équations suivantes :

1) $y'+y=e^x$
2) $y'-y=1+e^x$
3) $y'-2y=e^x\cos(2x)$
4) $(1+e^x)y'+e^xy=0$
5) $\operatorname{ch}x\,y'-\operatorname{sh}x\,y=\operatorname{sh}^3x$
6) $(1+x^2)y'+2xy=-1$

**2** ★★ (*Problèmes de Cauchy d'ordre 1*) Résoudre les équations suivantes :

1) $\begin{cases} y'+y=\dfrac{1}{1+e^x} \\ y(\ln 2)=0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} y'-2xy=-(2x-1)e^x \\ y(1)=0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} y'+\arctan(\sqrt{1+e^x})y=0 \\ y(\pi e^{-1})=0 \end{cases}$

**3** ★★ (*ED linéaires d'ordre 1, bis*) Résoudre les équations suivantes sur un intervalle $I$ convenable (s'il y en a plusieurs, choisissez-en un) :

1) $xy'-2y=4\ln x$
2) $\sqrt{1-x^2}\,y'+y=1$
3) $\begin{cases} y'-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y=e^{\arccos x} \\ y(0)=0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} y'-\tan(x)y=1 \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \end{cases}$

**4** ★★★☆ On considère l'équation $(E): xy'+y=0$.

1) Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2) Si $y$ est une solution de $(E)$ définie sur $\mathbb{R}$, que serait la valeur de $y(0)$ ?
3) Peut-on trouver une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ ?

**5** ★★★☆ Soit $a,b$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'ED

$$(E): \quad y'+a(t)y+b(t)y^2=0$$

On admettra que, si $y$ est une solution qui n'est pas identiquement nulle, alors $y$ ne s'annule jamais.

1) Soit $y$ une solution de $(E)$ non identiquement nulle. En posant $z=\dfrac{1}{y}$, se ramener à une équation linéaire en la fonction $z$.
2) Résoudre l'équation $(E)$.

> 1) Faire une réécriture de l'équation pour faire apparaitre $z'$.

**6** ★★★ Trouver les fonctions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation $y'+y=\displaystyle\int_0^1 y(t)dt$. On pourra raisonner par analyse-synthèse.

> Dériver l'équation $y'+y=\displaystyle\int_0^1 y(t)dt$.

## Équations différentielles d'ordre 2

**7** ★★☆ (*ED linéaires d'ordre 2*) Résoudre les équations suivantes :

1) $4y''+8y'+5y=2e^x$
2) $y''-5y'+4y=e^x$
3) $y''-4y'+4y=4e^{2x}$
4) $y''+4y=3\cos^2x$
5) $y''+iy'=x+3$
6) $y''+3y'-4y=ix^2$

**8** ★★ (*Problème de Cauchy d'ordre 2*) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\begin{cases} y''+4y=\cos(3x) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} y''+2y'+4y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

**9** ★★☆ (*ED déphasée*) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(\lambda - x)$$

1) Montrer que si $f$ vérifie cette condition, alors $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire l'ensemble des fonctions $f$ vérifiant cette condition.

1) $f'$ s'écrit comme une composée de deux fonctions...
2) Dériver la relation $f'(x) = f(\lambda - x)$

**10** ★★☆

1) Montrer que l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que l'équation $y'' + 2y' + 2y = f(x)$ possède au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre.
2) C'est une équation différentielle linéaire. Utiliser la structure de l'ensemble des solutions.

**11** ★★★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = e^x$$

*Indication : en justifiant, on pourra dériver l'égalité ci-dessus et montrer que $f$ vérifie une équation différentielle.*