

# TD 35 : Dénombrement

## Dénombrement problématisé

**1** ★ Donner le nombre d'anagrammes (distincts) des mots CHIMIE, SCIENCES, BLABLACAR

**2** ★ Soit  $n \geq 2$  un entier. Un tournoi regroupe  $n$  joueurs. Chaque joueur joue contre tous les autres une et une seule fois. Quel est le nombre total de parties jouées au cours du tournoi ?

**3** ★★ Lors de la finale du 100m des mondiaux d'athlétisme, dix coureurs s'élancent. Quatre de ces coureurs sont jamaïcains. Les trois premiers arrivés montent sur le podium dans l'ordre d'arrivée.

- 1) Combien y a-t-il de podiums possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de podiums avec uniquement des jamaïcains ?
- 3) Combien y a-t-il de podiums avec au moins un jamaïcain ?
- 4) Combien y a-t-il de podiums avec exactement deux jamaïcains ?

**4** ★★ Un jeu de 52 cartes est composé de 4 couleurs ( $\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit$ ) et de 13 valeurs (1, 2, 3, ..., 10, V, D, R). Au poker, une main est constituée de cinq cartes prises parmi 52 cartes. Dénombrer les mains qui vérifient les conditions suivantes :

- 1) Quinte Flush Royale : 5 cartes de 9 à R de même couleur.
- 2) Quinte Flush (non royale) : 5 cartes de valeurs consécutives (sauf 9 à R) de même couleur.
- 3) Carré : 4 cartes de même valeur (4 dames par exemple).
- 4) Full : 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une autre valeur (3 rois et 2 valets par exemple).
- 5) Couleur : 5 cartes de même couleur (sans que la main ne forme une Quinte Flush).
- 6) Breton : 3 cartes de même valeur (sans que la main ne forme un Carré ni un Full).
- 7) (\*) On introduit un joker (noté J) dans le jeu, qui peut remplacer toute autre carte du jeu (mais une seule à la fois). Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

**5** ★★ Soit  $n \geq 2$  un entier.

- 1) Combien y a-t-il de transpositions dans  $S_n$  ?
- 2) Combien y a-t-il de double transpositions dans  $S_n$  ?
- 3) On suppose  $n \geq 4$ . Combien y a-t-il de 4-cycles dans  $S_n$  ?
- 4) Soit  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Combien y a-t-il de  $p$ -cycles dans  $S_n$  ?

**6** ★★★ Soit  $p, q \in \mathbb{N}$ . On part du point  $(0, 0)$  et on souhaite arriver au point  $(p, q)$  en se déplaçant, à chaque étape, soit d'une unité vers la droite, soit d'une unité vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

## Dénombrement mathématisé

**7** ★ Soit  $E$  un ensemble fini et  $A, B$  deux parties de  $E$ . On suppose que  $\text{card}(E) < \text{card}(A) + \text{card}(B)$ . Montrer que  $A \cap B \neq \emptyset$ .

**8** ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j \right\}$$

$$E_3 = \left\{ (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid i \leq j \leq k \right\}$$

**9** ★★ Soit  $a, b, n \in \mathbb{N}$ . En développant le polynôme  $(1+X)^{a+b}$  de deux manières, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Retrouver cette formule par dénombrement.

**10** ★★★ (Oral CCINP) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble possédant  $n$  éléments.

- 1) Déterminer le nombre  $a$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \subset B$ .
- 2) Déterminer le nombre  $b$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .

- 3) Déterminer le nombre  $c$  de triplets  $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$  tels que  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux dis-joints et vérifient  $A \cup B \cup C = E$ .

———— **Dénombrement combinatoire (dur)** ————

**11** ★★★ Soit  $n \geq 2$  un entier. On note  $E_n$  l'ensemble des matrices réelles de taille  $n$  dont chaque coefficient est dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ .

- 1) Combien y a-t-il de matrices de  $E_n$  avec exactement un 1 dans chaque ligne et chaque colonne ?
- 2) Combien de matrices de  $E_2$  sont inversibles ?
- 3) Déterminer le nombre de matrices  $A$  de  $E_2$  telles que  $A^2 \in E_2$ .

**12** ★★★ On considère un échiquier de 8 cases sur 8 cases.

- 1) Combien de tours au maximum peut-on placer sur l'échiquier tout en garantissant qu'aucune tour ne peut en capturer une autre ?
- 2) Même question avec des fous.