

TD 37 : Variables aléatoires

Déterminer une loi

1 ★ Soit X une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. Quelle est la loi de la v.a. $Y = n - X$?

2 ★★ Une pièce truquée a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir face et $1 - p$ d'obtenir pile. On lance la pièce continuellement et on s'arrête ou bien après avoir obtenu pile pour la première fois, ou bien après n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit X la v.a. qui donne le nombre total de "face" obtenus.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi, i.e. que la famille $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in X(\Omega)}$ est une densité de probabilités.

3 ★★ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la v.a. égale au maximum des deux numéros obtenus.

- 1) Déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour tout $k \in [1, n]$.
- 2) En déduire la loi de X .

4 ★★ Un examen est passé par n candidats. Chaque candidat réussit l'examen avec une probabilité p . En cas d'échec, le candidat passe un examen de rattrapage, qu'il réussit avec la même probabilité p . On note X le nombre de candidats ayant réussi l'examen, avec ou sans rattrapage. Déterminer la loi de X .

X compte le nombre de "succès" en n essais, avec n le nombre de candidats. Cela nous oriente vers une loi usuelle...

Conditionnement et indépendance

5 ★★ Soit Ω un univers fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si les v.a. indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ le sont.

Exprimer $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.

6 ★★ Soit X, Y deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[1, n]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

$X + Y$ est à valeurs dans $[2, 2n]$. Il suffit ensuite, pour tout $k \in [2, 2n]$, de déterminer $\mathbb{P}(X + Y = k)$. Utiliser la formule des probabilités totales.

7 ★★ Soit X et Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $[1, n]$, avec

$$\forall i \in [1, n] \quad p_i := \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i)$$

Montrer que $\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$

Quel est le complémentaire de l'événement $\{X \neq Y\}$?

8 ★★ Soit X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$ de deux façons :

- 1) En utilisant un argument faisant intervenir la loi de Bernoulli.
- 2) Par un calcul direct de la loi de $X + Y$ et en utilisant le fait que la famille $(\{X = i\})_{0 \leq i \leq n}$ est un S.C.E.

9 ★★ On dispose de n pièces, chacune ayant une probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile. On choisit de lancer X pièces, où X est une v.a. qui suit loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Puis, on compte le nombre de piles obtenus, ce qui définit une autre v.a. que l'on note Y .

- 1) Déterminer $Y(\Omega)$.
- 2) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(Y = j \mid X = k)$.
- 3) En déduire $\mathbb{P}(Y = j)$ sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer. Que vaut $\mathbb{P}(Y = 0)$?
- 4) Que vaut $\mathbb{P}(Y = 1)$?

10 ★★ On dispose de deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second est pipé et donne 6 une fois sur trois (les autres faces étant équiprobables). On prend un dé au hasard et on le lance.

- 1) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
- 2) On obtient un 5. Même question.

Poser les événements

P : "le dé est pipé"

S : "on a obtenu un 6"

Couples de v.a.

11 ★ On considère deux v.a. indépendantes X et Y qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

12 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X, Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ dont la loi conjointe est

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\binom{n}{j}}{2^n(n+1)}$$

- 1) Déterminer et reconnaître les lois marginales de (X, Y) .
- 2) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

13 ★★ Soit $n \geq 2$ un entier. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$. On suppose que la loi conjointe de (X, Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{(i+j)}{n^2(n+1)}$$

pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$.

- 1) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, i.e. que la famille $(\mathbb{P}(X = i, Y = j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est une densité de probabilités.
- 2) Déterminer la loi marginale de X , puis celle de Y .
- 3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

14 ★★★ Une famille a deux enfants.

- 1) L'enfant aîné est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
- 2) L'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
- 3) L'un des enfants est un garçon né un matin (entre minuit et midi). Calculer la probabilité que le deuxième enfant soit un garçon et montrer qu'elle est comprise entre 40% et 45%.

Pour la question 3, poser :

- S_i la v.a. qui vaut G si le i -ème enfant est un garçon, F sinon
- H_i la v.a. qui vaut M si le i -ème enfant est né un matin, AM sinon

Notez que les v.a. S_1, S_2, H_1, H_2 sont toutes indépendantes. On veut calculer

$$\mathbb{P}((S_1, S_2) = (G, G) \mid \dots)$$

(à vous de compléter et de continuer)