

Contrôle continu 1

le 9 novembre 2018

Durée : 1h05

Exercice 1. Inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour la matrice suivante, calculer les valeurs propres, et donner une base des espaces propres associés

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit f l'application linéaire

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x - z).$$

a) Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

On considère

$$\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3), \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}' = (v_1, v_2), \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vérifier que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 .c) Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.**Exercice 4. a)** Donner la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , de la rotation d'angle $-\pi/2$.b) Donner la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , de la symétrie par rapport à la droite $y = x$.**Exercice 5. a)** Démontrer que l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par la matrice suivante est une isométrie

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer s'il s'agit d'une rotation ou d'une symétrie, et donner l'angle de rotation ou l'axe de symétrie.

Contrôle continu 2

le 7 décembre 2018

Durée : 1h05

Aucun document autorisé.

Les appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (5,5 points)(1,5 pt) a) Démontrer que l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par la matrice suivante est une isométrie

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1 pt) b) Déterminer s'il s'agit d'une rotation, d'une réflexion ou d'une rotation impropre.

(3 pt) c) Déterminer les éléments géométriques (l'angle et l'axe orienté pour une rotation ; le plan pour une réflexion ; l'angle, l'axe orienté et le plan pour une rotation impropre).

Exercice 2. (7 points) Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier.(2 pt) a) Le groupe d'isométries de \mathbb{R}^2 qui préservent l'hexagone contient 12 éléments. Donner ces 12 isométries.Soient R la rotation d'angle $2\pi/3$ et σ la symétrie d'axe AD .(1 pt) b) Est-ce que $R \circ \sigma$ est une rotation ? une symétrie ?(2 pt) c) Déterminer l'élément géométrique de $R \circ \sigma$ (l'angle pour une rotation ; l'axe pour une symétrie).(2 pt) d) Donner sans calcul la trace de $R \circ \sigma$.**Exercice 3. (4 points)**Soit $G = C_4 = \{\text{Id}, R, R^2, R^3\}$ (R est une rotation d'angle $\pi/2$).Le but de cet exercice est de démontrer que le groupe G n'a pas de représentation ρ telle que

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 pt) a) Supposons qu'une telle représentation existe. Trouver $\rho(\text{Id})$, $\rho(R^2)$ et $\rho(R^3)$.(2 pt) b) Obtenir une contradiction. (Utiliser $R \circ R^3 = \text{Id}$).**Exercice 4. (3,5 points)** Soit $G = C_2 = \{\text{Id}, R\}$ (R est une rotation d'angle π).

(2 pt) a) Vérifier que

$$\begin{aligned} \text{Id} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est bien une représentation du groupe G .

(1,5 pt) b) Donner le caractère de cette représentation.

Examen session 1
 le 10 janvier 2018
 Durée : **2h**
2 pages

Aucun document autorisé.
 Les appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (3,5 points)

(0,5 pt) a) Démontrer que l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par la matrice suivante est une isométrie

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 pt) b) Déterminer s'il s'agit d'une rotation, d'une réflexion ou d'une rotation impropre.

(2 pt) c) Déterminer les éléments géométriques (l'angle et l'axe orienté pour une rotation ; le plan pour une réflexion ; l'angle, l'axe orienté et le plan pour une rotation impropre).

Exercice 2. (4 points)

On rappelle la formule pour une rotation

$$f(v) = (\cos \theta)v + (\sin \theta)(w \wedge v) + (1 - \cos \theta)(w \cdot v)w.$$

a) (0,5 pt) Rappeler ce qu'est **précisément** "w" dans cette formule.

b) (2,5 pt) Donner la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $(1, -1, 1)$.

c) (1 pt) Vérifier que la matrice obtenue dans b) est bien une matrice d'une isométrie. (Si la vérification ne marche pas, vous n'obtenez pas le point pour cette question. Dans cette situation il faut revoir la question b).)

Exercice 3. (7 points) Soit $ABCDE$ un pentagone régulier. Soit O le centre du pentagone.

Soit G groupe d'isométries de \mathbb{R}^2 qui préservent le pentagone.

Soit $R \in G$ la rotation d'angle $2\pi/5$ (autour de O). Soit σ la symétrie d'axe OA.

(0,5 pt) a) Quel est l'ordre de σ .

(1 pt) b) Quel est l'ordre de R^2 .

(0,5 pt) c) Est-ce que R et σ sont dans la même classe de conjugaison ?

(2 pt) d) Démontrer que R^2 et R^3 sont dans la même classe de conjugaison.

(1 pt) e) Est-ce que R et R^3 sont dans la même classe de conjugaison ?

On considère le sous-groupe $H = \{\text{Id}, R, R^2, R^3, R^4\}$ de G .

(0,5 pt) f) Est-ce que H est commutatif ?

(0,5 pt) g) Est-ce que G est commutatif ?

(1 pt) h) Est-ce que R^2 et R^3 sont dans la même classe de conjugaison de H ?

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4. (3,5 points)

On note G le groupe d'isométries de la molécule NH_3 . On rappelle qu'il contient six éléments Id , R , R^2 , σ_1 , σ_2 , σ_3 . On considère les deux caractères χ_1 et χ_2 suivants.

	Id	R	R^2	σ_1	σ_2	σ_3
χ_1	2	-1	-1	0	0	0
χ_2	3	0	0	1	1	1

(1 pt) a) Démontrer que χ_1 est irréductible.

(0,5 pt) b) Calculer $(\chi_2|\chi_1)$.

(2 pt) c) En déduire que χ_2 est réductible. Donner la décomposition de χ_2 en somme d'irréductibles.

Exercice 5. (4 points) On considère le groupe $T_d = \text{Isom}(CH_4)$.

(2 pt) a) On considère le caractère χ donné par :

$$\begin{aligned}\chi(\text{Id}) &= 7 \\ \chi(C_3) &= 1 \\ \chi(C_2) &= 3 \\ \chi(S_4) &= -1 \\ \chi(\sigma_d) &= -3\end{aligned}$$

En vous aidant de la table de caractères, décomposer χ en somme de caractères irréductibles.

T_d	Id	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
E	2	-1	2	0	0
T_1	3	0	-1	1	-1
T_2	3	0	-1	-1	1

(2 pt) b) (question bonus plus compliquée) Déterminer le nombre de caractères (non nécessairement irréductibles) de dimension 3 du groupe T_d .