



Université Pierre et Marie Curie

Stage de Master 2

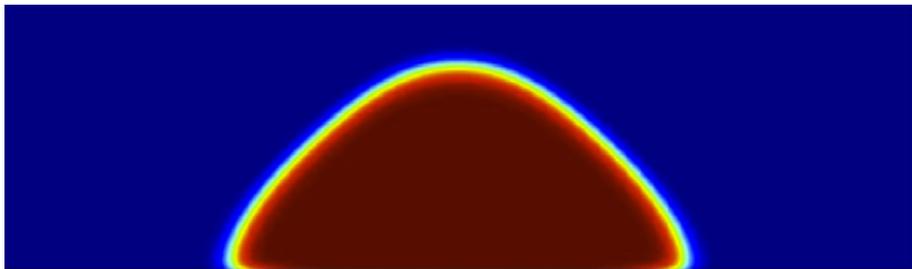


Institut Montpellierain
Alexander Grothendieck
Avril 2018 - Août 2018

Modèles mathématiques pour l'écologie évolutive

Gwenaël Peltier

27 août 2018



Référents au sein des établissements :

UPMC :	Antoine LE HYARIC
IMAG :	Mathieu ALFARO

Résumé

Au cours de ce stage, on a étendu à un modèle en dimension supérieure, un encadrement de la vitesse asymptotique de propagation d'une solution de l'équation de Fisher-KPP. Cet encadrement concerne le cas où la condition initiale est à queue lourde, i.e. décroît plus lentement que toute exponentielle à l'infini.

La première étape a été de définir, dans le cadre de la dimension supérieure, ce que signifie avoir une queue lourde pour la condition initiale. Plusieurs pistes ont été retenues, et c'est au cours de la deuxième étape que la bonne définition a été trouvée.

La deuxième étape a été de construire de manière explicite les sur- et sous-solutions pour obtenir l'encadrement. Plusieurs difficultés ont été surmontées : la présence d'un terme non-local, l'extension de la sous-solution depuis une bande étroite à une bande large, entre autres. Plusieurs constructions étaient possibles, notamment pour la sous-solution, et cela a mené à plusieurs améliorations successives des résultats obtenus, en termes de précision et de généralité.

Enfin, on a exhibé un état stationnaire de notre modèle et proposé une conjecture sur la convergence locale de la solution en temps long vers cet état stationnaire. Cette conjecture est étayée par des simulations numériques et par des résultats similaires obtenus dans un modèle très proche, mais plus simple que celui de ce rapport.

Mots-clés libres : Fronts d'invasion, vitesse asymptotique de propagation, modèles non-locaux, écologie évolutive

Remerciements

J'ai réalisé ce stage de Master 2 à l'Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck (IMAG), rattaché à l'Université de Montpellier.

Je tiens tout d'abord à remercier Matthieu Alfaro, pour m'avoir donné l'occasion de faire ce stage, pour ses conseils et son expérience, qui m'ont permis de réaliser ce travail. Je le remercie également pour m'avoir fait participer aux séminaires de son équipe de recherche, ainsi qu'à une journée de conférences à l'université Paris-Sud, qui m'a aidée à élargir ma vision sur les thématiques de recherche en équations de réaction-diffusion. Enfin, je le remercie pour son soutien financier et ses efforts pour que ce stage se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Je tiens à remercier Ophélie Ronce, pour notre discussion éclairante sur une application possible du modèle que j'ai étudié pour un problème de biologie. Je la remercie également pour m'avoir invité à la journée des doctorants de l'Institut des Sciences de l'Evolution de Montpellier (ISEM).

Je remercie Mario Veruete, Alvaro Mateos Gonzalez, André Harnist, Guillaume Ferrière et Antoine Toussaint, pour leurs conseils, leur sympathie, et leur intérêt porté à mon travail.

Table des matières

Introduction	6
I Contexte et état de l'art	7
1 L'équation de Fisher-KPP	7
1.1 Présentation	7
1.2 Préliminaires	8
1.3 Des solutions particulières : les fronts de propagation	9
1.4 Résultats de convergence asymptotique	10
1.5 L'ensemble de niveau	13
1.6 Cas où u_0 est à queue lourde	15
2 Un modèle en dimension supérieure	20
2.1 Présentation	20
2.2 Préliminaires	21
2.3 Extinction possible de la population	22
2.4 Vitesse de propagation	23
II Travail effectué au cours du stage	25
3 Objectifs du stage	25
4 Préliminaires	25
4.1 Propriétés de n	26
4.2 Un changement de variables utile	29
4.3 Majoration du terme intégral	30
4.4 Problèmes aux valeurs propres	32
5 Résultats théoriques	32
5.1 Retour sur la condition de queue lourde	32
5.2 Estimations de l'ensemble de niveau	34
5.3 Preuves des théorèmes 5.3 à 5.5	36
5.3.1 Deux propositions préliminaires	36
5.3.2 Preuve du théorème 5.3	38
5.3.3 Preuve du théorème 5.4	43
5.3.4 Preuve du corollaire 5.5	49
6 Autres résultats et simulations numériques	50
6.1 Existence d'une solution stationnaire	50
6.2 Simulations numériques	52
6.3 Hair Trigger Effect pour l'accélération	52

III Perspectives	54
7 Effet Allee	54
7.1 Présentation du modèle	54
7.2 Préliminaires	54
7.3 Cas où u_0 est à queue lourde	55
7.4 Problème posé	56
Conclusion	57
Annexe	58
8 Éléments propres d'un opérateur elliptique	58
8.1 Opérateur elliptique du second ordre	58
8.2 Éléments propres d'un opérateur elliptique	58
8.3 Éléments propres généralisés	59
8.4 Influence du signe de la valeur propre principale	60
8.5 Généralisation de la notion "fonction de type Fisher-KPP"	62
9 Principes du maximum paraboliques	62
9.1 Opérateur parabolique du second ordre	63
9.2 Principe de comparaison linéaire	64
9.3 Principe du maximum fort	65
9.4 Principe du maximum fort dans dans un domaine non cylindrique	65
9.5 Principe de comparaison linéaire sur un domaine non borné	66
9.6 Principe de comparaison non-linéaire	67
10 Inégalité de Harnack parabolique	67
10.1 Inégalité de Harnack classique	67
10.2 Inégalité de Harnack raffinée	68

Introduction

Les équations de réaction-diffusion sont un des principaux domaines de recherche en mathématiques appliquées. L'équation de Fisher-KPP, qui sert de base à la grande majorité des modèles, est toujours un sujet de recherche aujourd'hui. Ce type d'équations intervient de manière récurrente en neurosciences, en écologie, en dynamique des populations, ou encore en chimie.

Bien qu'on ne connaisse pas la solution exacte de ces équations, une approche populaire pour analyser ces équations passe par l'étude de la vitesse asymptotique de propagation des solutions, et dans certains cas la convergence des solutions vers une certaine fonction.

C'est dans ce contexte que s'inscrit mon stage de Master 2, qui s'est déroulé au sein de l'Institut Montpellierain Alexandre Grothendieck, rattaché à l'Université de Montpellier.

Première partie

Contexte et état de l'art

1 L'équation de Fisher-KPP

1.1 Présentation

On appelle équation de Fisher-KPP l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = f(u), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

où f est une fonction C^1 qui vérifie

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0, \\ 0 < f(s) \leq f'(0)s, & s \in]0, 1[, \\ f'(0) > 0, \\ f'(1) < 0, \end{cases} \quad (2)$$

tandis que u_0 est uniformément continue et vérifie

$$\begin{cases} u_0(x) \in [0, 1], & x \in \mathbb{R}, \\ u_0 \not\equiv 0. \end{cases} \quad (3)$$

On admettra que pour toute condition initiale u_0 vérifiant (3), il y a existence et unicité d'une solution $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}_+; L^\infty(\mathbb{R}))$ au problème (1)-2.

L'équation (1) a été étudiée indépendamment en 1937 dans [7] et [9]. Elle intervient notamment en dynamique des populations (où l'inconnue $u(t, x)$ peut représenter une densité d'individus), ou en cinétique chimique (où u est la concentration d'une molécule). Dans la suite, on adoptera le point de vue où u représente une population d'individus.

L'équation de Fisher-KPP est l'un des modèles les plus simples d'équation de réaction-diffusion. Le terme $-\partial_{xx} u$ correspond à la partie diffusion : la population se déplace là où il y a peu d'individus, ce qui a tendance à uniformiser la densité en temps long, comme pour l'équation de la chaleur. Le terme $f(u)$ correspond à la partie réaction : il représente la variation de la population par la naissance ou la mort. On notera que f ne dépend pas de t, x .

Nous verrons en section 1.2 que les hypothèses ci-dessus entraînent que $u(t, x) \in [0, 1]$ pour tous (t, x) . Le fait que la densité de population reste positive est naturel. Le fait que cette densité est majorée par 1 signifie que l'environnement est saturé pour cette valeur limite : il ne permet pas d'accueillir davantage d'individus (manque de ressources, etc).

L'équation (1) est dite de Fisher-KPP en raison de la condition $f(s) \leq f'(0)s$ sur $]0, 1[$, et la fonction f est alors dite de Fisher-KPP. A titre d'exemple, $f(u) =$

$u(1-u)$ est de type Fisher-KPP, tandis que $f(u) = u^2(1-u)$ ne l'est pas car sa dérivée en 0 est nulle. Cette condition implique en particulier que le rapport $f(s)/s$, qui représente le taux de naissance par tête, est maximal en $s = 0$. Autrement dit, la population se reproduit d'autant mieux que la densité u est petite (mais strictement positive). Sans le terme diffusif $-\partial_{xx}u$, la solution de l'équation $u'(t) = f(u(t))$ tend ou bien vers l'équilibre instable 0 si $u_0 = 0$, ou bien vers l'équilibre stable 1 si $u_0 \in]0, 1]$.

Ainsi, on est en présence de deux effets : la diffusion qui tend à étaler la répartition dans l'espace des individus, et la réaction qui fait tendre la population vers 1. Dans le cadre Fisher-KPP, nous verrons que cela conduit à la survie de la population u , et même à la saturation de tout point de $x \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) \rightarrow 1.$$

Enfin, on aura besoin de cette dernière hypothèse sur f : il existe $\delta > 0$, $s_0 \in]0, 1[$ et $M > 0$ tels que

$$f(s) \geq f'(0)s - Ms^{1+\delta}, \quad s \in]0, s_0].$$

C'est en particulier le cas si f vérifie les hypothèses précédentes et que $f \in C^{1,\delta}([0, s_0])$.

1.2 Préliminaires

Dans cette section, on expose quelques résultats importants de l'annexe, qui seront utiles tout au long de ce rapport.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et Ω un domaine (i.e. ouvert connexe) de \mathbb{R}^N . On définit le domaine cylindrique $D :=]0, T[\times \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Soit P un opérateur uniformément parabolique du second ordre sur D , dont la définition est donnée en annexe, section 9.1 (en première lecture, on peut considérer $N = 1$ et $P = \partial_t - \partial_{xx}$).

Définition 1.1. Soit $u \in C^{1,2}(D)$. On dit que u est une sous-solution (resp. sous-solution) de l'opérateur P si on a $Pu \leq 0$ (resp. $Pu \geq 0$) sur D .

Les principaux résultats concernant les opérateurs paraboliques sont les principes de comparaison.

Théorème 1.2 (Principe de comparaison linéaire (domaine borné)). *On suppose que D est borné. Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D . Soient $u, v \in C^{1,2}(D) \cap C(\overline{D})$. Alors*

$$\begin{cases} Pu \leq Pv, & (t, x) \in D, \\ u(t, x) \leq v(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) \leq v(0, x), & x \in \Omega, \end{cases} \implies u \leq v, \quad (t, x) \in D.$$

Dans le cas où le domaine D est non borné, il faut une condition supplémentaire sur la croissance en $|x| \rightarrow +\infty$:

Théorème 1.3 (Principe de comparaison linéaire (domaine non borné)). *Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D . Soit $w \in C^{1,2}(D) \cap C(\overline{D})$ telle que $w(t, x) \geq -Be^{\beta|x|^2}$ pour des constantes $B, \beta > 0$. Alors*

$$\begin{cases} Pw \geq 0, & (t, x) \in D, \\ w(t, x) \geq 0, & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ w(0, x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \implies w(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in D.$$

Remarque. Par linéarité, on obtient un principe de comparaison entre $u, v \in C^{1,2}(D) \cap C(\overline{D})$: si par exemple $|u|, |v| \leq Be^{\beta|x|^2}$, alors

$$\begin{cases} Pu \leq Pv, & (t, x) \in D, \\ u(t, x) \leq v(t, x), & (t, x) \in \partial_p D \end{cases} \implies u(t, x) \leq v(t, x), \quad (t, x) \in D.$$

Dans cette section 1, on utilisera surtout le principe de comparaison non-linéaire suivant, qu'on énonce dans un cadre très restreint car cela nous suffit dans ce rapport :

Théorème 1.4 (Principe de comparaison non-linéaire). *On suppose que $D =]0, T[\times \mathbb{R}^N$. Soit $u, v \in C^{1,2}(D)$ des solutions bornées de l'équation $\partial_t w - \Delta w = F(w)$. On suppose que F et F' sont continues et bornées sur U , où U est un ouvert qui contient les valeurs prises par u et v .*

Alors, si $u(0, x) \leq v(0, x)$ sur \mathbb{R}^N , on a $u(t, x) \leq v(t, x)$ sur D .

Voici une première application du théorème 1.4 :

Corollaire 1.5. *On suppose que u_0 vérifie (3). Alors la solution $u(t, x)$ du problème (1)-(2) vérifie $0 \leq u(t, x) \leq 1$ pour tous (t, x) .*

Démonstration. Soit $T > 0$. Comme $u \in C^0([0, T], L^\infty(\mathbb{R}))$, on en déduit qu'elle est bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. Ensuite, on remarque que $\underline{u} \equiv 0$ et $\overline{u} \equiv 1$ sont des solutions particulières de (1). Comme

$$\underline{u}(0, x) = 0 \leq u_0(x) \leq 1 = \overline{u}(0, x),$$

on en déduit le résultat par le théorème 1.4. □

1.3 Des solutions particulières : les fronts de propagation

On considère ici l'équation de Fisher-KPP sans condition initiale :

$$v_t - v_{xx} = f(v), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

et on cherche une solution particulière sous la forme $v(t, x) = \varphi_c(x - ct)$ pour un $c > 0$. La fonction v consiste donc en un profil $y \mapsto \varphi_c(y)$ qui se propage vers la droite à vitesse c . Elle est solution de l'équation ssi φ_c vérifie l'EDO

$$\varphi_c''(y) + c\varphi_c'(y) + f(\varphi_c(y)) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

En outre, on dira que φ_c est un front si elle vérifie

$$\begin{cases} 0 < \varphi_c(y) < 1 & \forall y \in \mathbb{R}, \\ \varphi_c(y) \rightarrow 1, & y \rightarrow -\infty, \\ \varphi_c(y) \rightarrow 0, & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Enfin, on notera que comme l'EDO est autonome, elle est invariante par translation. Si φ_c est un profil solution (resp. un front solution), il en est de même pour $\varphi_c(\cdot + \xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. L'existence et l'unicité de telles solutions est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Soit $c^* = 2\sqrt{f'(0)} > 0$.*

- *Pour tout $c \geq c^*$ il existe un front φ_c , unique à translation près, solution de (4). De plus, $\varphi'_c < 0$ sur \mathbb{R} .*
- *Si $0 < c < c^*$, il existe un profil φ_c , unique à translation près, solution de (4). Cependant, φ_c présente des oscillations autour de 0 quand $y \rightarrow +\infty$ et n'est donc pas un front.*

Ce théorème justifie entre autres la notation φ_c employée : pour tout $c > 0$, le profil φ_c est unique modulo les translations. Pour $c < c^*$, le profil φ_c vérifie $\varphi_c(-\infty) = 1$ et $\varphi_c(+\infty) = 0$, mais il présente des oscillations autour de 0 quand $y \rightarrow +\infty$ (cf figure ...).

La preuve du cas $c < c^*$ repose sur une étude simple du portrait de phase autour de 0, qui est un état instable du fait que $f'(0) > 0$. Lorsque $c < c^*$, l'état 0 est une spirale ce qui explique les oscillations (Figure 1). Lorsque $c \geq c^*$, l'état 0 est un noeud et donc φ_c ne présente pas d'oscillations à l'infini (Figure 2). Toutefois, pour montrer que φ_c est bien un front lorsque $c \geq c^*$, la preuve est beaucoup plus longue et nécessite l'utilisation du principe du maximum (cf section 9 en annexe). Pour cette raison, nous ne détaillerons pas la preuve de ce théorème.

Mentionnons enfin que $\varphi_c(y)$ est solution de (4) ssi $\varphi_{-c}(-y)$ est aussi solution. Ainsi, si on cherche des solutions qui se propagent vers la gauche, donc avec une vitesse $c < 0$, alors par symétrie on a un résultat similaire au théorème 1 (en symétrisant la notion de front pour $c < 0$) :

- pour $-c^* < c < 0$, il existe un profil φ_c , unique à translation près, solution de (4). Cependant, φ_c présente des oscillations autour de 0 quand $y \rightarrow -\infty$ et n'est donc pas un front.
- pour $c < -c^*$, il existe un profil φ_c , unique à translation près, solution de (4). Ce profil est un front dans le sens où $\varphi'_c > 0$, $\varphi_c(-\infty) = 0$, $\varphi_c(+\infty) = 1$.

1.4 Résultats de convergence asymptotique

Revenons au problème de Cauchy (1). A la fin de la section 1.1, nous avons vu de manière non formelle que la population u envahit tout l'espace au cours du temps. Dans cette section, nous allons justifier cette assertion, et exhiber le profil limite, quand $t \rightarrow +\infty$, de $u(t, \cdot)$ dans certains cas particuliers.

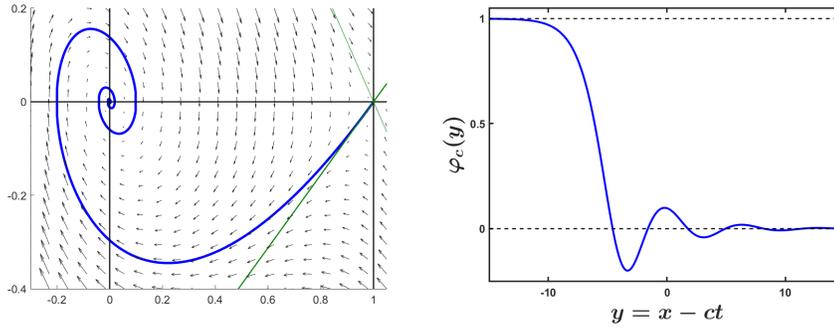


FIGURE 1 – À gauche, portrait de phase de (4) avec φ_c en abscisse et φ'_c en ordonnée, pour $f(u) = u(1 - u)$, et $c = \frac{1}{2} < c^*$. À droite, le profil obtenu. L'état d'équilibre 1 est un point col, donc instable. L'état 0 est une spirale stable, et φ_c y oscille quand $y \rightarrow +\infty$.

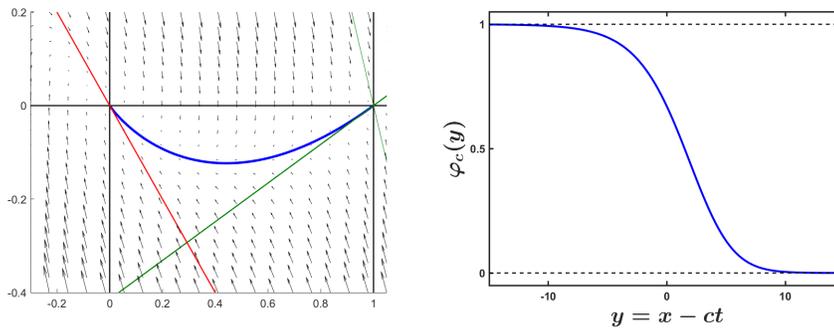


FIGURE 2 – À gauche, portrait de phase de (4) avec φ_c en abscisse et φ'_c en ordonnée, pour $f(u) = u(1 - u)$, et $c = 2 = c^*$. À droite, le profil obtenu. L'état d'équilibre 1 est un point col, donc instable. L'état 0 est un noeud stable, et φ_c y converge en décroissant strictement quand $y \rightarrow +\infty$.

Théorème 1.7 ([12], théorèmes 8.1 et 9.2). *On suppose que u_0 vérifie (3), ainsi que*

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0, \quad u_0(x) = 0 \text{ sur un intervalle de la forme } [k, +\infty[.$$

Alors il existe une fonction $\xi(t)$ telle que la solution $u(t, x)$ du problème (1)-(2) vérifie

$$\|u(t, \cdot) - \varphi_{c^*}(\cdot - c^*t + \xi(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

De plus, $\xi(t) = O(\ln t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Lorsque u_0 est à support compact, on peut montrer que u converge uniformément vers φ_{c^*} sur $[0, +\infty[$ et φ_{-c^*} sur $] -\infty, 0]$ (on aurait pu remplacer 0 par un réel quelconque), avec des shifts respectifs $\xi_+(t)$ et $\xi_-(t)$. De ce résultat, on obtient facilement le corollaire suivant :

Corollaire 1.8. *On suppose que u_0 vérifie (3). Alors pour tout $c < c^*$, la solution $u(t, x)$ du problème (1)-(2) vérifie*

$$\inf_{|x| \leq ct} u(t, x) \rightarrow 1, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Si u_0 est une condition initiale quelconque, comme $u_0 \not\equiv 0$, il existe une fonction v_0 qui vérifie $v_0 \not\equiv 0$, $v_0 \leq u_0$, et v_0 à support compact. Soit $v(t, x)$ la solution de (1) avec condition initiale v_0 . Alors par le principe de comparaison non-linéaire (théorème 1.4), on a $v(t, x) \leq u(t, x)$ pour tout (t, x) . Or, v converge vers φ_{c^*} sur \mathbb{R}_+ et φ_{-c^*} sur \mathbb{R}_- .

Soit maintenant $\delta > 0$ et $\zeta < 0$ tel que $\varphi_{c^*}(\zeta) > 1 - \delta$. Comme $c < c^*$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a $ct - c^*t \leq \zeta$. Donc pour $x \in [0, ct]$ on a par décroissance de φ_{c^*} :

$$\varphi_{c^*}(x - c^*t) \geq \varphi_{c^*}(ct - c^*t) \geq \varphi_{c^*}(\zeta) \geq 1 - \delta.$$

En prenant T éventuellement encore plus grand, on peut assurer par le théorème 1.7 que $v(t, x) \geq \varphi_{c^*}(x - c^*t) - \delta$ sur $[0, ct]$. Ainsi, on a pour $t \geq T$:

$$\inf_{0 \leq x \leq ct} v(t, x) \geq 1 - 2\delta.$$

Comme δ a été choisi quelconque, et que $v \leq u$, on a le résultat. \square

Ce résultat montre que toute condition initiale, aussi petite soit-elle, entraîne une invasion de tout l'espace avec une vitesse asymptotique au moins c^* , dans les deux directions. Ce phénomène est appelé le "Hair Trigger Effect".

Théorème 1.9 ([12], théorèmes 8.2 et 9.3). *On suppose que u_0 vérifie (3), ainsi que*

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0, \quad u_0 > 0, \quad u_0(x) \underset{+\infty}{\sim} Ae^{-\alpha x},$$

avec $A > 0$ et $0 < \alpha < \alpha^* := \sqrt{f'(0)}$. Soit c donné par

$$c = \alpha + \frac{f'(0)}{\alpha}.$$

Alors il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que la solution $u(t, x)$ du problème (1)-(2) vérifie

$$\|u(t, \cdot) - \varphi_c(\cdot - ct + \xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Lorsque α est égal à la valeur critique α^* , alors u se propage asymptotiquement à la vitesse $c^* := 2\sqrt{f'(0)}$ et il converge uniformément vers $\varphi_{c^*}(\cdot - c^*t + \xi(t))$ avec $\xi(t) = O(\ln t)$.

Lorsque $\alpha > \alpha^*$, on peut encadrer u_0 par une fonction v_0 à support compact et une fonction $w_0(x) \sim Ae^{-\alpha^*x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Si on note v (resp. w) la solution de (1) avec pour condition initiale v_0 (resp w_0), alors par le principe de comparaison non-linéaire, on a $v \leq u \leq w$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Or, v et w convergent vers φ_{c^*} (bien qu'avec des shifts différents). Donc u se propage aussi à vitesse c^* , et converge en fait encore vers φ_{c^*} avec un shift variable $\xi(t) = O(\ln t)$. Il en va de même si u_0 décroît plus rapidement que $e^{-\alpha^*x}$ à l'infini.

De façon très informelle, on peut justifier le théorème 1.9 de la manière suivante : pour $c > c^*$, on peut montrer que les fronts φ_c décroissent exponentiellement vite quand $y \rightarrow +\infty$. Pour des grandes valeurs de y , φ_c est donc très proche de zéro et on peut chercher son expression comme solution de l'équation (4) linéarisée en 0 :

$$\varphi_c'' + c\varphi_c' + f'(0)\varphi_c = 0.$$

Si on cherche φ_c sous la forme $e^{-\alpha x}$, on trouve que α doit vérifier $\alpha^2 - c\alpha + f'(0) = 0$, d'où la relation entre c et α du théorème 1.9. Des deux racines α_\pm possibles, une seule est inférieure à α^* . Elle est donnée par $\alpha_- = \frac{1}{2} \left(c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)} \right) > 0$ car $c > c^* = 2\sqrt{f'(0)}$.

1.5 L'ensemble de niveau

Pour une fonction $v(t, x)$ à valeurs dans $[0, 1]$, on définit son ensemble de niveau $\lambda \in]0, 1[$ par :

$$E_\lambda^v(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid v(t, x) = \lambda\},$$

pour $t \geq 0$. Si $E_\lambda^v(t)$ est non vide pour t assez grand, et si pour tout $\lambda \in]0, 1[$

$$\inf E_\lambda^v(t) \sim \sup E_\lambda^v(t) \sim ct, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,$$

on dira par extension que v se propage (asymptotiquement) à vitesse c .

Dans le cas particulier $v(t, x) = \varphi_c(x - ct)$, l'ensemble $E_\lambda^{\varphi_c}(t)$ est réduit à un singleton puisque $\varphi_c' < 0$, et on vérifie immédiatement que $E_\lambda^{\varphi_c}(t) = \{ct + \varphi_c^{-1}(\lambda)\}$. Autrement dit, v se propage à vitesse c .

De manière générale, on cherche rarement à déterminer explicitement u ou même φ_c . Les recherches liées à l'équation (1) et sur ses généralisations portent

plutôt sur la vitesse de propagation (asymptotique) de u . On cherchera donc à obtenir le meilleur encadrement possible sur $E_\lambda^u(t)$ pour de grandes valeurs de t . Voici un premier résultat simple :

Proposition 1.10. *On suppose que $u(t, \cdot)$ converge uniformément vers $\varphi_c(\cdot - ct + \xi(t))$ sur \mathbb{R} avec $c > 0$. Alors pour tous $\lambda \in]0, 1[$ et $\delta > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a*

$$E_\lambda^u(t) \subset [\varphi_c^{-1}(\lambda) + ct - \xi(t) - \delta, \varphi_c^{-1}(\lambda) + ct - \xi(t) + \delta].$$

En particulier, u se propage à vitesse c .

Démonstration. Pour plus de concision, on pose $\Psi_t(x) = \varphi_c(x - ct + \xi(t))$. Soit $\delta > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$. Comme $\Psi_t' < 0$, et par continuité de Ψ_t , il existe $\varepsilon(\lambda, \delta) > 0$ tel que

$$\begin{cases} \lambda \pm \varepsilon \in]0, 1[, \\ \Psi_t^{-1}(\lambda - \varepsilon) < \Psi_t^{-1}(\lambda) + \delta, \\ \Psi_t^{-1}(\lambda + \varepsilon) > \Psi_t^{-1}(\lambda) - \delta. \end{cases}$$

Or, par hypothèse, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ on a $\|u(t, \cdot) - \Psi_t(\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in E_\lambda^u(t)$, on a $u(t, x) = \lambda \in [\Psi_t(x) - \varepsilon, \Psi_t(x) + \varepsilon]$, i.e.

$$\begin{aligned} \Psi_t(x) &\in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon], \\ \Rightarrow x &\in [\Psi_t^{-1}(\lambda + \varepsilon), \Psi_t^{-1}(\lambda - \varepsilon)], \\ \Rightarrow x &\in [\Psi_t^{-1}(\lambda) - \delta, \Psi_t^{-1}(\lambda) + \delta], \end{aligned}$$

d'où le résultat car $\Psi_t^{-1}(\lambda) = \varphi_c^{-1}(\lambda) + ct - \xi(t)$. □

Ainsi, si u_0 vérifie les conditions du théorème 1.7, u se propage à vitesse c^* . De même si u_0 et f vérifie les conditions du théorème 1.9, alors u se propage à vitesse c . Dans tous les cas, comme u converge vers φ_c avec $c \geq c^* > 0$, on a

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) &\rightarrow 1, & \text{quand } t &\rightarrow \infty, \\ \limsup_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) &\rightarrow 0, & \text{quand } t &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

et ceci, conjugué avec l'estimation $E_\lambda^u(t) \sim ct$, donne immédiatement que

$$\begin{aligned} \inf_{x \leq c't} u(t, x) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1, & \forall c' < c, \\ \sup_{x \geq c't} u(t, x) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, & \forall c' > c. \end{aligned}$$

Si par contre u_0 est à support compact, alors on a

$$\begin{aligned} \inf_{|x| \leq c't} u(t, x) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1, & \forall c' < c, \\ \sup_{|x| \geq c't} u(t, x) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, & \forall c' > c. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, u relie les deux états d'équilibre, 0 et 1, et l'invasion se produit dans une région qui se déplace à vitesse c .

1.6 Cas où u_0 est à queue lourde

On a vu que si u_0 est à décroissance plus rapide qu'une exponentielle, alors u se propage à vitesse c^* . Il est alors naturel de se demander à quelle vitesse se propagerait u si u_0 décroît plus lentement qu'une exponentielle. Cela motive la définition suivante :

Définition 1.11. On dit qu'une fonction $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est à queue lourde (en $+\infty$) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad w(x) \geq e^{-\varepsilon x} \text{ sur } [x_\varepsilon, +\infty[,$$

ou de manière équivalente, si pour tout $\varepsilon > 0$, $w(x)e^{\varepsilon x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

A titre d'exemple, les fonctions suivantes sont à queue lourde (les équivalents étant pris en $+\infty$) :

$$\begin{aligned} w(x) &\sim Cx^{-a}, & C > 0, a > 0, \\ w(x) &\sim C(\ln x)^{-a}, & C > 0, a > 0, \\ w(x) &\sim Ce^{-bx^a}, & C > 0, b > 0, a \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Une conséquence facile à établir est la suivante :

Proposition 1.12. *On suppose que u_0 vérifie (3), est à queue lourde, et vérifie*

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0, \quad u_0 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 0.$$

Alors en notant u la solution de (1)-(2), l'ensemble $E_\lambda^u(t)$ est non vide pour t suffisamment grand, et

$$\frac{\inf E_\lambda^u(t)}{t} \rightarrow +\infty.$$

En particulier, pour tout $c > 0$, on a $E_\lambda^u(t) > ct$ pour t assez grand.

Démonstration. Soit $c \geq c^* > 0$ quelconque. Soit $\alpha \in]0, \sqrt{f'(0)}[$ tel que $c = \alpha + f'(0)/\alpha$. Soit maintenant $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \geq x_\alpha$ on a $u_0(x) \geq e^{-\alpha x}$. On pose

$$m = \inf_{]-\infty, x_\alpha]} u_0(x),$$

et on affirme que $m > 0$. En effet, il existe x_- tel que

$$u_0(x) > \frac{1}{2} \liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x), \quad x \leq x_-$$

tandis que u_0 est minorée par une constante strictement positive sur le compact $[x_-, x_\alpha]$. D'où $m > 0$. On pose alors

$$v_0(x) = \begin{cases} m, & x \leq x_\alpha, \\ me^{-\alpha(x-x_\alpha)}, & x \geq x_\alpha. \end{cases}$$

Comme $u_0(x) \geq v_0(x)$, on en conclut par le principe de comparaison non-linéaire que $u(t, x) \geq v(t, x)$. Or, par le théorème 1.9, v converge vers φ_c , et donc $E_\lambda^v(t) \sim ct$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Si on prouve que $E_\lambda^u(t)$ est non vide pour t assez grand et pour tout $\lambda \in]0, 1[$, alors la démonstration est terminée : en effet, on a $\inf E_\lambda^u(t) \geq \inf E_\lambda^v(t)$, donc

$$\frac{\inf E_\lambda^u(t)}{t} \geq \frac{\inf E_\lambda^v(t)}{t} \rightarrow c, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Or, c a été pris quelconque. On en déduit que $\inf E_\lambda^u(t)/t$ devient plus grand que toute constante quand $t \rightarrow +\infty$, d'où le résultat.

Il reste donc à prouver que $E_\lambda^u(t)$ est non vide pour de grandes valeurs de t . Il suffit pour cela de montrer que

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) &\rightarrow 1, & \text{quand } t \rightarrow \infty, \\ \limsup_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) &\rightarrow 0, & \text{quand } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La première assertion est vérifiée pour $v(t, x)$ car v converge vers φ_c . Comme $u(t, x) \geq v(t, x)$, cette assertion est aussi vraie pour u . Pour prouver la seconde, on regarde w la solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_{xx} w = f'(0)w, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Or, on remarque que

$$\partial_t u - \partial_{xx} u - f'(0)u \leq \partial_t u - \partial_{xx} u - f(u) = 0.$$

Donc u est une sous-solution de l'opérateur $\partial_t - \partial_{xx} - f'(0)$. Comme de plus $u(0, x) \leq w(0, x)$, on a par le principe de comparaison linéaire (théorème 1.3) que $u(t, x) \leq w(t, x)$ pour tous (t, x) .

Or, $w(t, x)e^{-f'(0)t}$ est solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale u_0 . On en déduit que pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$w(t, x)e^{-f'(0)t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} u_0(x-y) dy.$$

On se fixe $t > 0$. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(t, x) = 0$. Comme $\lim_{\infty} u_0 = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe x_+ tel que $u_0(x) \leq \varepsilon$ si $x \geq x_+$. Ensuite, soit $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y_0}^{+\infty} e^{-y^2/4t} < \varepsilon.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} & w(t, x)e^{-f'(0)t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} u_0(x-y) dy, \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{-y^2/4t} u_0(x-y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y_0}^{+\infty} e^{-y^2/4t} u_0(x-y) dy, \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-y_0}^{+\infty} e^{-y^2/4t} u_0(x+y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y_0}^{+\infty} e^{-y^2/4t} dy, \end{aligned}$$

car $u_0 \leq 1$. Soit ensuite $x \geq x_+ + y_0$. Alors pour $y \geq y_0$ on a $u_0(x+y) \leq \varepsilon$, d'où :

$$\begin{aligned} w(t, x)e^{-f'(0)t} &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-y_0}^{+\infty} e^{-y^2/4t} + \varepsilon, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} + \varepsilon, \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

d'où le résultat. On en déduit que $u(t, x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, et ce pour tout $t \geq 0$. La preuve est terminée. \square

On sait ainsi que la vitesse de $E_\lambda^u(t)$ est sur-linéaire si u_0 est à queue lourde. Autrement dit, la solution u accélère au cours du temps et on a $\inf_{x \leq ct} u(t, x) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$, et ce pour tout $c \in \mathbb{R}$. On peut toutefois estimer plus précisément l'ensemble de niveau pour des fonctions qui vérifient la condition suivante :

Définition 1.13. On dit qu'une fonction $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition (Q) si :

1. w est uniformément continue et bornée sur \mathbb{R} ,
2. $\liminf_{-\infty} w > 0$, $w > 0$, $\lim_{+\infty} w = 0$,
3. $\exists \xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que w soit C^2 et décroissante sur $[\xi_0, +\infty[$,
4. $w''(x) = o(w(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Par hypothèse, u_0 vérifie 1. et la proposition 1.12 montre que si en plus u_0 vérifie 2. et est à queue lourde, alors la vitesse de propagation de u est sur-linéaire. De manière remarquable, une fonction qui vérifie (Q) est nécessairement à queue lourde, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.14 ([8]). *On suppose que w vérifie (Q). Alors $w'(x) = o(w(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$, et w est à queue lourde.*

On donne la démonstration par souci d'exhaustivité, mais elle peut être omise en première lecture.

Démonstration. On pose $g = w'/w$. Cette fonction vérifie donc $g' = w''/w - g^2$ sur $[\xi_0, +\infty[$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(y_n)_n$ dans $[\xi_0, +\infty[$ tendant vers $+\infty$, telle que $|g(y_n)| > \varepsilon$ pour tout n . Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|w''|/w \leq \varepsilon^2/2$ sur $[y_N, +\infty[$. Après extraction par une sous-suite, ou bien $g(y_n) < -\varepsilon$, ou bien $g(y_n) > \varepsilon$ pour tout n .

Le premier cas entraîne que $g(x) < -\varepsilon$ pour tout $x \geq y_N$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $\theta > y_N$ la plus petite valeur telle que $g(\theta) = -\varepsilon$. Alors $g'(\theta) \leq \varepsilon^2/2 - \varepsilon^2 = -\varepsilon^2/2 < 0$. Absurde. Donc $g < -\varepsilon$ sur $[y_N, +\infty[$. Ainsi $g' < \varepsilon^2/2 - \varepsilon^2 = -\varepsilon^2/2$ sur $[y_N, +\infty[$. On en déduit que $g(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par conséquent, pour x assez grand, $g' \leq -g^2/2$ car $w''/w \rightarrow 0$. En divisant par $-g^2 < 0$ et en intégrant, on trouve $1/g(x) \geq x/2$, ce qui est absurde car $1/g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Contradiction.

Le second cas entraîne que $g(x) > \varepsilon$ pour tout $x \geq y_N$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $\theta_0 > y_N$ tel que $g(\theta_0) = \varepsilon$. Alors $g'(\theta_0) \leq \varepsilon^2/2 - \varepsilon^2 = -\varepsilon^2/2 < 0$. Or, il existe $n > N$ tel que $y_n > \theta_0$. Comme $g(y_n) > \varepsilon$, on en déduit l'existence d'un $\theta_1 > \theta_0$ tel que $g(\theta_1) = \varepsilon$ et $g > \varepsilon$ sur $[\theta_1, y_n]$. Mais $g'(\theta_1) \leq -\varepsilon^2/2 < 0$. Absurde. Donc $g > \varepsilon$ sur $[y_N, +\infty[$. En particulier, $g'(x) \leq -\varepsilon^2/2$ sur $[y_N, +\infty[$. Donc $g(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Mais g est minoré par ε . Contradiction.

Ainsi, $w'(x) = o(w(x))$. On en déduit notamment que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe x_ε tel que pour $x \geq x_\varepsilon$ on a $w'(x)/w(x) \geq -\varepsilon$. Après intégration on trouve $\ln w(x) \geq -\varepsilon x$, donc $w(x) \geq e^{-\varepsilon x}$. Comme cette inégalité est valable pour $\varepsilon > 0$ quelconque, w est à queue lourde. \square

Lorsque u_0 vérifie (Q), on peut obtenir un encadrement de $E_\lambda^u(t)$, ce qui constitue le résultat principal de [8] :

Théorème 1.15 ([8]). *On suppose que u_0 vérifie (3) et la condition (Q). Soit u la solution de (1)-(2).*

Alors pour tous $\lambda \in]0, 1[$, $\varepsilon \in]0, f'(0)[$, $\gamma > 0$ et $\Gamma > 0$, il existe $T_{\lambda, \varepsilon, \gamma, \Gamma} > 0$ tel que

$$E_\lambda^u(t) \subset u_0^{-1} \left(\left[\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}, \Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t} \right] \right), \quad \forall t \geq T_{\lambda, \varepsilon, \gamma, \Gamma}.$$

La démonstration de ce théorème étant très longue, on se contente d'exposer les étapes : on construit une sous-solution $\underline{u}(t, x)$ du problème avec $\underline{u}(0, x) \leq u(0, x)$. On en déduit que $\underline{u}(t, x) \leq u(t, x)$. Ensuite, par construction, $\inf E_\lambda^{\underline{u}}(t)$ se propage vers la droite à vitesse $u_0^{-1}(\Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t})$, ce qui donne la borne inférieure de $E_\lambda^u(t)$ dans le théorème. Pour la borne supérieure, on fait de même avec une sur-solution $\bar{u}(t, x)$. Toute la difficulté de la preuve est de construire les bonnes sous- et sur-solutions.

Faisons quelques remarques sur ce théorème : d'une part, pour t assez grand, on a vu que $E_\lambda^u(t)$ est non vide. D'autre part, pour t suffisamment grand, les nombres $\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}$ et $\Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t}$ sont bien dans $]0, 1[$, et même aussi proche de zéro qu'on veut.

Ensuite, comme u_0 vérifie la condition (Q), on peut trouver $\xi_1 \geq \xi_0$ tel que $u_0(x) \geq u_0(\xi_1)$ si $x \leq \xi_1$. On renvoie à la proposition 5.6 pour une preuve. Ainsi, pour t suffisamment grand, les réels $\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}$ et $\Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t}$ sont strictement inférieurs à $u_0(\xi_1)$ et donc à $u_0(x)$ pour $x \leq \xi_1$. En utilisant la décroissance de u_0 sur $[\xi_1, +\infty[$, on peut donc réécrire la conclusion du théorème 1.15 par :

$$\min u_0^{-1}(\Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t}) \leq \inf E_\lambda^u(t) \leq \sup E_\lambda^u(t) \leq \max u_0^{-1}(\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}).$$

On voit donc que la position des ensembles de niveau dépend uniquement du comportement de u_0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Enfin, on remarque que tous les ensembles $E_\lambda^u(t)$ pour $\lambda \in]0, 1[$ se retrouvent dans la région $u_0^{-1}\left([\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}, \Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t}]\right)$ pour t assez grand. On en déduit en particulier que

$$\inf_{x \leq \min u_0^{-1}(\Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t})} u(t, x) \rightarrow 1 \text{ et } \sup_{x \geq \max u_0^{-1}(\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t})} u(t, x) \rightarrow 0,$$

quand $t \rightarrow +\infty$. C'est donc dans cette région que se produit l'invasion.

Appliquons maintenant ces estimations aux exemples suivants de conditions initiales à queue lourde,

$$u_0(x) = \mathbf{1}_{]-\infty, 1[} + x^{-a} \mathbf{1}_{[1, +\infty[}, \quad a > 0, \quad (5)$$

$$u_0(x) = \mathbf{1}_{]-\infty, e[} + (\ln x)^{-a} \mathbf{1}_{[e, +\infty[}, \quad a > 0, \quad (6)$$

$$u_0(x) = \mathbf{1}_{]-\infty, 0[} + e^{-bx^a} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}, \quad b > 0, a \in]0, 1[. \quad (7)$$

Dans tous les cas, ces fonctions sont décroissantes, et ceci entraîne que $u(t, \cdot)$ est strictement décroissante pour $t > 0$. En effet, pour tout $h > 0$, $u(t, \cdot + h)$ est solution de (1) avec $u_0(\cdot + h)$ comme condition initiale. Or, $u_0(x + h) \leq u_0(x)$ par hypothèse. Par le principe du maximum fort (théorème 9.6 en annexe), on en déduit que $u(t, x + h) < u(t, x)$ pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ (si on avait égalité en un point, cela entraînerait que $u_0(\cdot + h) = u_0(\cdot)$, ce qui n'est manifestement pas le cas). Ainsi, $E_\lambda^u(t)$ contient au plus un élément pour $t > 0$.

Dans le cas (5), on obtient pour t assez grand :

$$\frac{1}{\Gamma^{1/a}} e^{(f'(0)-\varepsilon)t/a} \leq E_\lambda^u(t) \leq \frac{1}{\gamma^{1/a}} e^{(f'(0)+\varepsilon)t/a}.$$

Ainsi, u se propage à une vitesse exponentielle.

Dans le cas (6), on obtient pour t assez grand :

$$\exp\left(\frac{1}{\Gamma^{1/a}} e^{(f'(0)-\varepsilon)t/a}\right) \leq E_\lambda^u(t) \leq \exp\left(\frac{1}{\gamma^{1/a}} e^{(f'(0)+\varepsilon)t/a}\right).$$

Ainsi, u se propage à vitesse sur-exponentielle.

Dans le cas (7), on obtient pour t assez grand :

$$\left(-\frac{1}{b} \ln \Gamma + \frac{1}{b}(f'(0) - \varepsilon)t\right)^{1/a} \leq E_\lambda^u(t) \leq \left(-\frac{1}{b} \ln \gamma + \frac{1}{b}(f'(0) + \varepsilon)t\right)^{1/a}.$$

Ainsi, u se propage à une vitesse en $t^{1/a}$, sur-linéaire car $1/a > 1$.

On voit donc que plus u_0 décroît lentement, plus u se propage rapidement, ce qui est logique en vertu du principe de comparaison.

2 Un modèle en dimension supérieure

2.1 Présentation

Dans cette partie, on considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = (\tilde{r}(x, y) - \int n(t, x, y') dy') n, & t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ n(0, x, y) = n_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (8)$$

avec $\tilde{r}(x, y) = 1 - A(y - Bx)^2$, où $A, B > 0$ sont des constantes. Ici, $n(t, x, y)$ représente la densité d'une population à l'instant t , selon la variable d'espace x , et structurée selon un trait y qui influence leur survie. Enfin, la condition initiale n_0 sera supposée continue et vérifier

$$\begin{cases} n_0 \neq 0, \\ n_0(x, y) \geq 0, & \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \text{Supp} n_0 \text{ compact.} \end{cases} \quad (9)$$

Comme en dimension 1, le terme diffusif $-\partial_{xx} n$ dans (8) représente la migration de la population vers les zones à faible densité. Le terme $-\partial_{yy} n$ représente quant à lui les mutations dans l'espace des traits. Le terme de naissance et de mort $\tilde{r}(x, y)$ est maximal selon le trait $y = Bx$, qui dépend donc de l'environnement. On a également $\tilde{r} > 0$ dans la bande $]Bx - 1/\sqrt{A}, Bx + 1/\sqrt{A}[$. Enfin, le terme intégral représente la compétition entre les individus de trait différents qui se trouvent en x à l'instant t .

Ce dernier terme est dit non-local (en y) car la variation de n au point (t, x, y) dépend de la valeur de n en des points (t, x, z) avec z éventuellement très éloigné de y . A ce sujet, les résultats de cette section sont encore vrais pour un terme non-local de la forme

$$\int K(t, x, y, y') n(t, x, y') dy',$$

où $K \in L^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ est tel qu'il existe $k_-, k_+ > 0$ vérifiant $k_- \leq K \leq k_+$. Ceci permet modéliser de prendre en compte beaucoup plus de paramètres dans la compétition. Toutefois, par souci de concision, on se contentera du cas $K \equiv 1$.

Comparé au modèle scalaire de la section 1, le modèle (8) présente plusieurs difficultés supplémentaires :

- le terme de compétition est non-local. Pour cette raison, on ne peut invoquer de principe du maximum ou de principe de comparaison entre des (sur-, sous-)solutions de (8). Pour résoudre ce problème, on utilise un raffinement de l'inégalité de Harnack parabolique, ce qui permet de borner ce terme par un terme local. Après quoi on peut à nouveau utiliser les principes de comparaison usuels.
- le terme de croissance \tilde{r} dépend de (x, y) . Pour généraliser les résultats précédents, on aura besoin d'introduire les éléments propres d'un opérateur elliptique. Les résultats sont assez similaires à la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts : il existe une base de vecteurs propres pour l'opérateur elliptique $-\partial_{xx}n - \partial_{yy}n - \tilde{r}n$. La fonction propre principale, i.e. celle associée à la plus petite valeur propre (qui est dite principale), est également utile pour construire les sur- et sous-solutions nécessaires aux preuves.
- le terme de réaction peut être strictement négatif, notamment hors de la bande $]Bx - 1/\sqrt{A}, Bx + 1/\sqrt{A}[$. Ainsi la valeur propre principale peut changer de signe selon les valeurs de A et B . Une conséquence est qu'il peut y avoir extinction de la population, par exemple si A est trop grand (et donc si la bande est trop étroite). On n'a donc pas nécessairement de Hair Trigger Effect.

Si toutefois on a survie de la population, on s'attend à ce qu'elle envahisse l'espace mais que sa répartition reste concentrée autour de la droite $y = Bx$, là où elle a le plus de facilité à survivre. La question naturelle est donc de déterminer la vitesse asymptotique de propagation.

Le modèle (8)-(9) a été étudié dans [2], avec un taux de croissance \tilde{r} qui dépend du temps : $\tilde{r}(y, x - ct) = 1 - A(y - B(x - ct))^2$, et donc le trait optimal à un endroit x varie linéairement au cours du temps. Toutefois, par souci de clarté, et parce que le modèle étudié dans la partie II ne présente pas une telle dépendance, on se contentera de prendre $c \equiv 0$. Par ailleurs, le cas où $B = 0$ a été traité dans [5], et l'étude en est beaucoup plus simple. En effet, du fait que \tilde{r} ne dépende plus de x , les fonctions propres de $-\partial_{xx}n - \partial_{yy}n - \tilde{r}n$ non plus. Ainsi, lorsqu'on décompose u selon la base des fonctions propres de cet opérateur, on peut se ramener à un système d'équations de Fisher-KPP. Une telle approche n'est plus valide dès que $B \neq 0$, et il faut développer une autre approche.

2.2 Préliminaires

On admet qu'il y a existence d'une solution positive $n \in C^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^2) \cap C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R}^2)$ de l'équation (8), telle que $n(t, x, \cdot)$ soit bien intégrable en y pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Les résultats préliminaires ci-dessous sont tirés de [2]. On les énonce ici car ils seront utiles lors de la partie II, où ils seront redémontrés dans un cadre où les hypothèses sur n_0 seront moins fortes.

Théorème 2.1. *On suppose que n_0 vérifie (9). Alors il existe $N_\infty > 0$ tel que*

pour toute solution $n \geq 0$ de (8), pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy \leq N_{\infty}.$$

Théorème 2.2. *On suppose que n_0 vérifie (9). Il existe $C, \kappa > 0$ tq pour toute solution $n \geq 0$ de (8), pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*

$$n(t, x, y) \leq C \exp(-\kappa|y - Bx|). \quad (10)$$

Ce théorème montre en particulier que la population restera concentrée autour de la droite $y = Bx$ pour tout temps t .

Théorème 2.3. *On suppose que n_0 vérifie (9). Pour toute solution $n \geq 0$ de (8), pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t > 0$:*

$$n(t, x, y) > 0.$$

2.3 Extinction possible de la population

On remarque que

$$-\partial_{xx}\Gamma_0^{2D} - \partial_{yy}\Gamma_0^{2D} - \tilde{r}(x, y)\Gamma_0^{2D} = \lambda_0\Gamma_0^{2D},$$

où

$$\lambda_0 := \sqrt{A(1+B^2)} - 1, \quad \Gamma_0^{2D}(x, y) := \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{1+B^2}}(y - Bx)^2\right).$$

On peut montrer que λ_0 est la valeur propre principale généralisée (cf annexe) de l'opérateur elliptique $-\partial_{xx} - \partial_{yy} - \tilde{r}(x, y)$, mais ce n'est pas utile dans ce rapport.

Le signe de la valeur propre principale (éventuellement généralisée) joue un grand rôle pour déterminer le comportement en temps long des solutions de la plupart des problèmes paraboliques. On renvoie à la section 8.4 pour plus de détails. Dans le cadre du modèle (8), il est encore vrai que le signe de λ_0 détermine si on a survie ou extinction de la population. Cependant, la preuve est nettement plus technique.

Théorème 2.4 ([3]). *On suppose que $\lambda_0 > 0$. Soit $n_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\exists K > 0 \quad n(t, x, y) \leq K\Gamma_0^{2D}(x, y).$$

Alors toute solution $n \geq 0$ de (8) avec condition initiale n_0 s'éteint exponentiellement vite quand $t \rightarrow +\infty$:

$$n(t, x, y) \leq K\Gamma_0^{2D}(x, y)e^{-\lambda_0 t}.$$

C'est en particulier le cas si n_0 vérifie (9). Une conséquence de ce théorème est que la population totale en x s'éteint exponentiellement vite. En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy &\leq K e^{-\lambda_0 t} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0^{2D}(x, y) dy \\ &\leq K e^{-\lambda_0 t} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0^{2D}(0, y) dy \\ &\leq K' e^{-\lambda_0 t}, \end{aligned}$$

avec $K' > 0$.

A l'inverse, si $\lambda_0 < 0$, nous allons voir que la population survit, et même se propage et envahit l'espace à une vitesse déterminée.

2.4 Vitesse de propagation

Pour une solution $n \geq 0$ de (8), on définit son ensemble de niveau $\mu > 0$ par

$$E_\mu^n(t) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy = \mu \right\}. \quad (11)$$

C'est une généralisation logique de la dimension 1, le nombre d'individus présents en x à l'instant t étant $\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy$. La question qui se pose est donc de savoir à quelle vitesse limite se propage le niveau μ . Contrairement au cas de l'équation de Fisher-KPP (et au cas $B \equiv 0$), on ne sait pas toujours vers quelle fonction converge n quand $t \rightarrow +\infty$. Pour cette raison, on ne sait pas exactement pour quelles valeurs de μ l'ensemble $E_\mu^n(t)$ est non vide quand $t \rightarrow +\infty$. Par exemple, si $\lambda_0 > 0$, il est clair que $E_\mu^n(t)$ est vide si t est suffisamment grand, d'après le théorème 2.4 et la discussion qui le suit.

Cependant, si $\lambda_0 < 0$, on sait que $E_\mu^n(t)$ est non vide quand μ est assez proche de zéro, comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème 2.5 ([2]). *On suppose que $\lambda_0 < 0$ et que n_0 vérifie (9).*

Alors il existe une fonction $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\psi(+\infty) = 0$, telle que toute solution $n \geq 0$ de (8) vérifie

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy &\leq \psi(x - \omega t), \\ \forall t \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy &\leq \psi(-(x + \omega t)), \end{aligned}$$

où

$$\omega := 2\sqrt{-\frac{\lambda_0}{1+B^2}} > 0.$$

De plus, pour tout $\delta \in]0, \omega[$, il existe $\beta > 0$ tel que toute solution $n \geq 0$ de (8) vérifie

$$\forall t \geq 1, \int_{\mathbb{R}} n(t, \omega't, y) dy \geq \beta, \quad (12)$$

pour tout $\omega' \in [-\omega + \delta, \omega - \delta]$.

Ce théorème montre ainsi que $E_\mu^n(t)$ est non vide quand μ est inférieur ou égal à un $\beta(\delta)$. On peut être légèrement plus précis, avec le corollaire suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème 2.5 en termes d'ensemble de niveau.

Corollaire 2.6. *On suppose que $\lambda_0 < 0$ et que n_0 vérifie (9). Soit $n \geq 0$ une solution de (8). Soient $\delta \in]0, \omega[$ et $\beta(\delta)$ le réel associé par le théorème 2.5. Alors pour tout $\mu \in]0, \beta[$ il existe $K > 0$ tel que*

$$-\omega t - K \leq \inf E_\mu^n(t) \leq \sup E_\mu^n(t) \leq \omega t + K,$$

et pour tous $\omega' \in]0, \omega - \delta[$, on a

$$\frac{\inf (E_\mu^n(t) \cap \mathbb{R}_+)}{\omega' t} \rightarrow +\infty, \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

$$\frac{\sup (E_\mu^n(t) \cap \mathbb{R}_-)}{-\omega' t} \rightarrow +\infty, \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, dans le cas où $\lambda_0 < 0$, toute solution $n \geq 0$ envahit l'espace dans les deux directions à la vitesse $\pm\omega$. Contrairement à l'équation de Fisher-KPP scalaire, où la solution tend vers 1 quand $t \rightarrow +\infty$ localement uniformément en espace, on ne sait pas à quoi ressemble l'état "envahi" par n . On sait seulement que la population totale atteint au moins le niveau β , localement uniformément en x .

Finalement, on voit que si $\lambda_0 < 0$, alors, modulo la question d'unicité de la solution $n \geq 0$:

$$\exists \beta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad n_0 \geq 0, \neq 0 \implies \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy \geq \beta, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

On est donc en présence d'un Hair Trigger Effect. Il faut cependant noter que cela ne concerne que la population totale en x . L'espace \mathbb{R}^2 tout entier n'est pas envahi car en $x \in \mathbb{R}$ le trait se concentre majoritairement autour de $y = Bx$ et décroît exponentiellement loin de ce point comme le montre l'inégalité (10), ou les simulations numériques (Figure 3).

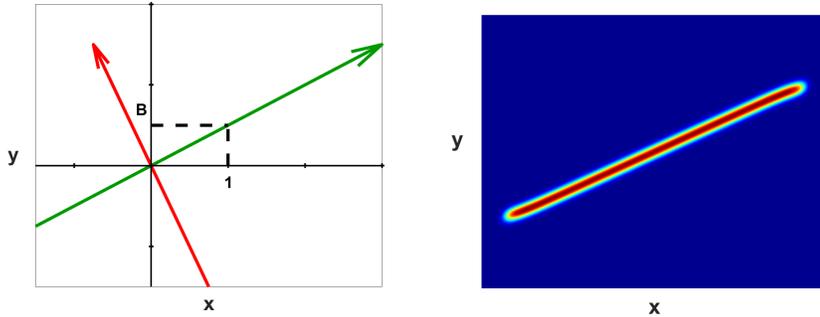


FIGURE 3 – A gauche, la droite $y = Bx$ en vert et la direction orthogonale $x = -By$ en rouge. A droite, la répartition de la population après un certain temps pour éliminer les comportements transitoires. Il y a invasion dans la direction $y = Bx$ mais elle reste localisée dans la direction $x = -By$.

Deuxième partie

Travail effectué au cours du stage

3 Objectifs du stage

On a vu que pour l'équation de Fisher-KPP (1), la solution se propage à vitesse asymptotique $c^* = 2\sqrt{f'(0)}$ si u_0 est à support compact, et sur-linéaire si u_0 est à queue lourde. Sous des conditions supplémentaires sur u_0 , on obtient un encadrement de l'ensemble de niveau $E_\lambda^u(t)$, comme précisé dans le théorème 1.15.

Dans le modèle (8), on a vu que si n_0 est à support compact, alors la solution se propage à une vitesse ω . A ce sujet, on peut mentionner que le résultat obtenu généralise en un certain sens celui de la dimension 1, car dans l'expression de ω le réel $-\lambda_0$ joue le rôle du terme $f'(0)$ de c^* , et la constante B n'est due qu'à un changement de repère. On renvoie à la section 8.5 l'annexe pour plus de détails.

Une question naturelle est donc de se demander si on observe encore une vitesse sur-linéaire pour n si au lieu de considérer n_0 à support compact, on la considère "à queue lourde", avec un sens qui reste à préciser dans le cadre de la dimension 2. C'est le sujet de mon stage et l'objet de cette partie II.

4 Préliminaires

On considère donc l'équation (8), qu'on réécrit ici

$$\begin{cases} \partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = (\tilde{r}(x, y) - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy') n, & t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ n(0, x, y) = n_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (13)$$

avec $\tilde{r}(x, y) = 1 - A(y - Bx)^2$, où $A, B > 0$ sont des constantes. La condition initiale n_0 sera supposée uniformément continue et vérifier

$$\begin{cases} n_0 \neq 0, \\ n_0(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (14)$$

avec la condition supplémentaire

$$\exists C_0, \kappa_0 > 0, \quad n_0(x, y) \leq C_0 \exp(-\kappa_0|y - Bx|). \quad (15)$$

Etant donné que $\tilde{r}(x, y) \rightarrow -\infty$ quand $|y - Bx| \rightarrow +\infty$, une telle majoration de n_0 ne paraît pas être une hypothèse très limitante.

Pour l'instant, on ne fait pas de supposition supplémentaire sur n_0 . La condition de queue lourde nécessite quelques préliminaires, et sera exposée à la section 5.1.

On admet qu'il y a existence d'une solution positive $n \in C^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^2) \cap C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R}^2)$ du problème (13)-(15), telle que $\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'$ soit bien définie pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

4.1 Propriétés de n

Dans cette partie, on adapte les preuves des résultats établis dans la section 2.2. Notre cadre est en effet plus général puisque n_0 n'est plus à support compact mais doit seulement vérifier (15).

Théorème 4.1. *On suppose que n_0 vérifie (14)-(15). Alors il existe $N_\infty > 0$ tel que pour toute solution $n \geq 0$ de (13), pour tous $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy \leq N_\infty.$$

Démonstration. Par positivité de n , on a

$$\partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n \leq \left(1 - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'\right) n.$$

On admet qu'on peut intégrer cette inégalité selon y , et que $\partial_y n(\cdot, \cdot, y) \rightarrow 0$ quand $|y| \rightarrow +\infty$ (cela découle d'estimations a priori sur les dérivées d'une solution). En posant $N(t, x) = \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy$, on obtient :

$$\partial_t N - \partial_{xx} N \leq (1 - N)N.$$

Par ailleurs, toute constante $K \geq 1$ vérifie

$$\partial_t K - \partial_{xx} K = 0 \geq (1 - K)K.$$

Si on pose $N_\infty := \max(1, 2C_0/\kappa_0)$, alors $N(0, x) \leq 2C_0/\kappa_0 \leq N_\infty$. Donc, par le principe de comparaison non-linéaire, on a $N(t, x) \leq N_\infty$, d'où le résultat. \square

Théorème 4.2. *On suppose que n_0 vérifie (14)-(15). Alors il existe $C, \kappa > 0$ tels que pour toute solution $n \geq 0$ de (13), pour tous $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$*

$$n(t, x, y) \leq C \exp(-\kappa|y - Bx|).$$

Démonstration. Soit $R > 1/\sqrt{A}$. On pose $\Omega_R := \{(x, y) \mid |y - Bx| < R\}$. Pour tous $(x, y) \in \Omega_{R+1}$, il existe $M > 0$ tel que

$$|r(y - Bx) - \int n(t, x, y') dy'| \leq \|r\|_{L^\infty(\Omega_{R_2})} + N_\infty =: M.$$

Ainsi, n vérifie une équation parabolique à coefficients bornés sur Ω_{R+1} (on considère l'intégrale comme une fonction de (t, x) , et non plus comme une fonction de n). On remarque que pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}$, on a

$$B_{\bar{x}} := B_{\mathbb{R}^2}((\bar{x}, B\bar{x}), R) \subset B_{\mathbb{R}^2}((\bar{x}, B\bar{x}), R+1) \subset \Omega_{R+1}.$$

Soit $\tau > 0$. L'inégalité de Harnack parabolique (théorème 10.1 en annexe) appliquée en $R_1 = R$ et $R_2 = R+1$ montre qu'il existe une constante $C_H(\tau, R) > 0$ tel que pour tout $\bar{t} > 2\tau$, et tout $\bar{x} \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in B_{\bar{x}}} n(\bar{t} - \tau, x, y) &\leq C_H \min_{(x,y) \in B_{\bar{x}}} n(\bar{t}, x, y) \\ &\leq \frac{1}{2R} C_H N(\bar{t}, x) \\ &\leq \frac{1}{2R} C_H N_\infty. \end{aligned}$$

Comme le membre de droite ne dépend pas de \bar{x} , et que $\cup_{\bar{x}} B_{\bar{x}} = \Omega_R$, on en déduit que

$$\max_{(x,y) \in \Omega_R} n(\bar{t} - \tau, x, y) \leq \frac{1}{2R} C_H N_\infty.$$

On pose ensuite

$$\kappa = \min \left(\kappa_0, \sqrt{\frac{AR^2 - 1}{1 + B^2}} \right) > 0, \quad K = \max \left(\frac{C_H N_\infty}{2R}, C_0 e^{-\kappa R} \right) > 0.$$

Pour $(x, y) \in \Omega_R^c$, on définit $\varphi(x, y) = K e^{-\kappa(|y - Bx| - R)}$. On remarque alors que sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega_R^c$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi - \partial_{xx} \varphi - \partial_{yy} \varphi - \tilde{r}(x, y) \varphi &= (-\kappa^2 B^2 - \kappa^2 - \tilde{r}(x, y)) K e^{-\kappa(|y - Bx| - R)}, \\ &\geq -(\kappa^2(1 + B^2) + (1 - AR^2)) K e^{-\kappa(|y - Bx| - R)}, \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

Donc φ est une sur-solution de l'opérateur $\partial_t \varphi - \partial_{xx} \varphi - \partial_{yy} \varphi - \tilde{r} \varphi$ sur Ω_R^c . Par ailleurs, n est une sous-solution de ce même opérateur car

$$\partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n - \tilde{r} n = -n \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy' \leq 0.$$

Ici, $\tilde{r} \notin L^\infty(\Omega_R^c)$, ce qui empêche d'utiliser le principe de comparaison tel qu'il est exposé dans le théorème 1.3. Il existe toutefois une version plus générale qu'on peut utiliser ici, donnée par le théorème 9.9 en annexe. Ainsi, il reste juste à vérifier que $n \leq \varphi$ sur le bord parabolique. D'après ce qui précède, on a $n \leq HN_\infty/2R \leq \varphi$ sur $\partial\Omega_R$. Enfin, l'hypothèse (15) entraîne $n(0, x, y) \leq \varphi(0, x, y)$ sur $\{0\} \times \Omega_R^c$ car $Ke^{\kappa R} \geq C_0$. Donc $n \leq \varphi$ sur Ω_R^c .

Finalement, sur Ω_R , on a

$$n(t, x, y) \leq \frac{C_H}{2R} N_\infty \leq \frac{C_H}{2R} N_\infty e^{-\kappa(|y-Bx|-R)},$$

et sur Ω_R^c , on a

$$n(t, x, y) \leq \varphi(x, y) = Ke^{-\kappa(|y-Bx|-R)},$$

et donc en posant $C = \max(K, \frac{1}{2R} C_H N_\infty) e^{\kappa R}$, on a $n(t, x, y) \leq Ce^{-\kappa|y-Bx|}$ pour tous $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$. \square

Théorème 4.3. *On suppose que n_0 vérifie (14)-(15). Alors pour toute solution $n \geq 0$ de (13), pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t > 0$:*

$$n(t, x, y) > 0.$$

Démonstration. Avec la borne sur $\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy$ montrée précédemment, on a

$$\begin{aligned} \partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n &= \tilde{r}(y - Bx)n - n \int n(t, x, y) dy \\ &\geq (\tilde{r} - N_\infty)n. \end{aligned}$$

Ainsi, n est une sur-solution de l'opérateur parabolique $\partial_t - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \tilde{r} + N_\infty$. Supposons par l'absurde qu'il existe un point (t_0, x_0, y_0) avec $t_0 > 0$ tel que $n(t_0, x_0, y_0) = 0$. Comme $n \geq 0$ par hypothèse, n atteindra son minimum sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ en ce point. On souhaite appliquer le principe du maximum fort (théorème 9.6 en annexe) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ pour conclure que $n \equiv 0$ sur $[0, t_0]$, ce qui est absurde d'après (14).

Pour appliquer le principe du maximum fort, on n'a pas besoin d'hypothèse sur le signe de $\tilde{r} - N_\infty$ car la valeur du minimum considéré est zéro. Le dernier obstacle est que $\tilde{r} \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Il y a deux façons de contourner ce problème : remarquer que la preuve du principe du maximum est encore valable si les coefficients sont localement bornés, ce qui est le cas de \tilde{r} , ou bien on peut le prouver directement à partir de la version L^∞ :

Soit l'opérateur parabolique $L = a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$, avec $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, et soit v la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t v - Lv = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ v(0, x, y) = v_0(x, y) & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ v_0 \geq 0, \neq 0 \end{cases}$$

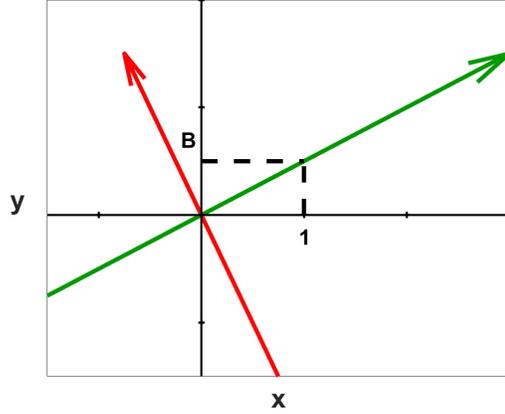


FIGURE 4 – Représentation du changement de variable (17). En vert, la direction $X \rightarrow +\infty$. En rouge, la direction $Y \rightarrow +\infty$.

et montrons que $v > 0$ si $t > 0$. Soit $R > 0$ et B_R la boule ouverte de \mathbb{R}^2 de rayon R . On prend R suffisamment grand pour que $v_0|_{B_R} \neq 0$. Soit w la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t w - Lw = 0 & (x, y) \in B_R, t > 0, \\ w = 0 & (x, y) \in \partial B_R, \\ w(0, x, y) = v_0(x, y)\varphi(x, y) & (x, y) \in \overline{B_R}, \end{cases} \quad (16)$$

avec φ une fonction lisse telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi v_0 = 0$ sur ∂B_R , $\varphi v_0 \neq 0$. Les coefficients de L étant bornés dans B_R , le principe du maximum fort montre que $w(t, \cdot, \cdot) > 0$ dans B_R pour $t > 0$. Or, v est une sur-solution du problème (16) : en effet $\varphi \leq 1$ et $v \geq 0 = w$ sur ∂B_R . On conclut que $v \geq w$ dans B_R , donc $v|_{B_R} > 0$. Ceci est valable pour des valeurs de R aussi grandes qu'on veut, ce qui termine la preuve. \square

4.2 Un changement de variables utile

Avant de poursuivre, on pose le changement de variables orthogonal suivant pour l'équation (8), représenté sur la Figure 4 :

$$X = \frac{x + By}{\sqrt{1 + B^2}}, \quad Y = \frac{y - Bx}{\sqrt{1 + B^2}}, \quad (17)$$

$$x = \frac{X - BY}{\sqrt{1 + B^2}}, \quad y = \frac{Y + BX}{\sqrt{1 + B^2}}. \quad (18)$$

Ce changement de variables est naturel, puisqu'on s'attend à ce que la population envahisse l'espace selon les directions $X \rightarrow \pm\infty$ en se concentrant

autour de la droite $Y = 0$. Du fait qu'il est orthogonal, le laplacien $-\partial_{xx} - \partial_{yy}$ est conservé par cette transformation. Si on pose $n(t, x, y) = v(t, X, Y)$, on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}} v(t, X, Y) dy = \int_{\mathbb{R}} v\left(t, \frac{x + By}{\sqrt{1+B^2}}, \frac{y - Bx}{\sqrt{1+B^2}}\right) dy,$$

donc on obtient que l'équation (8) se réécrit, en posant $r(Y) := 1 - A(1 + B^2)Y^2$:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v = \left(r(Y) - \int_{\mathbb{R}} v\left(t, \frac{\frac{X-BY}{\sqrt{1+B^2}} + By}{\sqrt{1+B^2}}, \frac{y - B\frac{X-BY}{\sqrt{1+B^2}}}{\sqrt{1+B^2}}\right) dy \right) v, \\ v(0, X, Y) = v_0(X, Y), \end{cases} \quad (19)$$

où l'on a posé $v_0(X, Y) = n_0(x, y)$. Pour l'instant on suppose seulement que v_0 vérifie

$$\begin{cases} v_0 \not\equiv 0, \\ \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \quad v_0(X, Y) \geq 0, \\ \exists C_0, \kappa_0 > 0 \quad v_0(X, Y) \leq C_0 e^{-\kappa_0 |Y|}. \end{cases} \quad (20)$$

En plus de (20), on rajoutera des conditions de "queue lourde" sur v_0 dans la section 5.1.

En particulier, on peut reformuler les théorèmes 4.1 à 4.3 pour v :

$$\begin{aligned} \exists N_\infty > 0, \forall t > 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} v(t, X, Y) dy \leq N_\infty, \\ \exists C, \kappa > 0, \forall t > 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}, \quad v(t, X, Y) \leq C e^{-\kappa \sqrt{1+B^2} |Y|}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\forall t > 0, \forall X, Y \in \mathbb{R}, \quad v(t, X, Y) > 0.$$

4.3 Majoration du terme intégral

On dispose de la majoration suivante du terme intégral $\int_{\mathbb{R}} v(t, X, Y) dy$:

Théorème 4.4 ([2]). *On suppose que v_0 vérifie (20). Alors pour toute solution $v \geq 0$ de (19), pour tous $t_0 > 0$ et $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe $M > 0$ et $C_M > 0$ telles que*

$$\int_{\mathbb{R}} v\left(t_0, \frac{\frac{X_0 - BY_0}{\sqrt{1+B^2}} + By'}{\sqrt{1+B^2}}, \frac{-B\frac{X_0 - BY_0}{\sqrt{1+B^2}} + y'}{\sqrt{1+B^2}}\right) dy' \leq C_M v(t_0, X_0, Y_0) + \frac{3C}{\mu} e^{-\mu M}.$$

On donne la preuve par souci d'exhaustivité.

Démonstration. On pose (x_0, y_0) le point correspondant à (X_0, Y_0) selon le changement de variable (18). Soit $M > 0$ tel que $|y_0 - Bx_0| = Y_0\sqrt{1+B^2} \leq M$. Alors, la majoration (15) donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v \left(t_0, \frac{\frac{X_0 - BY_0}{\sqrt{1+B^2}} + By'}{\sqrt{1+B^2}}, \frac{-B\frac{X_0 - BY_0}{\sqrt{1+B^2}} + y'}{\sqrt{1+B^2}} \right) dy' \\ = \int_{\mathbb{R}} n(t_0, x_0, y') dy' = \int_{\mathbb{R}} n(t_0, x_0, Bx_0 + y') dy' \\ \leq 2M \max_{y \in [-M, M]} n(t_0, x_0, Bx_0 + y) + \int_{[-M, M]^c} Ce^{-\mu|y|} dy. \end{aligned} \quad (22)$$

D'une part, on a trivialement $\int_{[-M, M]^c} Ce^{-\mu|y|} dy \leq \frac{2C}{\mu} e^{-\mu M}$.

D'autre part, on peut appliquer à la fonction v un raffinement de l'inégalité de Harnack, donné par le théorème 10.2 en annexe. En effet, v est solution du problème parabolique

$$\partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v - c(t, X, Y)v = 0,$$

où

$$c(t, X, Y) = r(Y) - \int_{\mathbb{R}} v \left(t, \frac{\frac{X - BY}{\sqrt{1+B^2}} + By}{\sqrt{1+B^2}}, \frac{y - B\frac{X - BY}{\sqrt{1+B^2}}}{\sqrt{1+B^2}} \right) dy,$$

est vu comme une fonction de (t, X, Y) et non plus de v . De plus, comme $v \geq 0$, on a $c(t, X, Y) \leq r(Y) \leq 1$, et par ailleurs, $v(t, X, Y) \leq C$, où C est la constante de l'inégalité (21). Ainsi, si on pose $\delta = \frac{C}{\mu} e^{-\mu M} > 0$, $\bar{X} = (x_0, Bx_0)$ et $R = M$, on obtient

$$\max_{(x, y) \in B(\bar{X}, M)} n(t_0, x, y) \leq C'_H \min_{(x, y) \in B(\bar{X}, M)} n(t_0, x, y) + \delta.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \max_{y \in [-M, M]} n(t_0, x_0, Bx_0 + y) &\leq \max_{(x, y) \in B(\bar{X}, M)} n(t_0, x, y) \\ &\leq C'_H \min_{(x, y) \in B(\bar{X}, M)} n(t_0, x, y) + \delta \\ &\leq C'_H \min_{(x, y) \in B(\bar{X}, M)} n(t_0, x, y) + \delta \\ &\leq C'_H \min_{y \in [-M, M]} n(t_0, x_0, Bx_0 + y) + \delta \\ &\leq C'_H n(t_0, x_0, y_0) + \delta. \end{aligned}$$

Finalement, si on pose $C_M := 2MC'_H$, et qu'on injecte cette inégalité dans (22), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} v \left(t_0, \frac{\frac{X_0 - BY_0}{\sqrt{1+B^2}} + By'}{\sqrt{1+B^2}}, \frac{-B\frac{X_0 - BY_0}{\sqrt{1+B^2}} + y'}{\sqrt{1+B^2}} \right) dy' \leq C_M v(t_0, X_0, Y_0) + \frac{3C}{\mu} e^{-\mu M}.$$

□

4.4 Problèmes aux valeurs propres

On renvoie à l'annexe pour plus d'informations sur les éléments propres d'un opérateur elliptique.

On définit l'opérateur elliptique $L = \partial_{YY} + r(Y)$. Sur $] - R, R[$, on pose λ_0^R la valeur propre principale de $-L$, et Γ_0^R la fonction propre principale associée de norme infinie égale à 1. En somme, on a donc

$$\begin{cases} -\partial_{YY}\Gamma_0^R - r(Y)\Gamma_0^R = \lambda_0^R\Gamma_0^R, & Y \in] - R, R[, \\ \Gamma_0^R(Y) > 0, & Y \in] - R, R[, \\ \Gamma_0^R(\pm R) = 0, \\ \|\Gamma_0^R\|_\infty = 1. \end{cases}$$

Sur \mathbb{R} , on remarque que

$$-\partial_{YY}\Gamma_0 - r(Y) = \lambda_0\Gamma_0,$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0 &:= \sqrt{A(1+B^2)} - 1, \\ \Gamma_0(Y) &:= \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{A(1+B^2)}Y^2\right) > 0, \quad Y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On a donc $\lambda_0 \leq \lambda_0(-L, \mathbb{R})$, où $\lambda_0(-L, \mathbb{R})$ est la valeur propre principale généralisée de $-L$ sur \mathbb{R} (cf annexe). On admet que $\lambda_0 = \lambda_0(-L, \mathbb{R})$, et donc en particulier que $\lambda_0^R \rightarrow \lambda_0$ quand $R \rightarrow +\infty$.

5 Résultats théoriques

5.1 Retour sur la condition de queue lourde

On rappelle la définition 1.13 :

Définition 5.1. On dit qu'une fonction $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition (Q) si :

1. w est uniformément continue et bornée sur \mathbb{R} ,
2. $\liminf_{-\infty} w > 0$, $w > 0$, $\lim_{+\infty} w = 0$,
3. $\exists \xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que w soit C^2 et décroissante sur $[\xi_0, +\infty[$,
4. $w''(x) = o(w(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On rappelle que, d'après la proposition 1.14, si w vérifie (Q), alors $w'(x) = o(w(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$, et w est à queue lourde.

Avec le théorème 1.15, on a vu que si $u_0 \leq 1$, alors la solution $u(t, x)$ de l'équation (1) avec condition initiale u_0 se propage à vitesse sur-linéaire, et on peut donner un encadrement de l'ensemble de niveau $E_\lambda^u(t)$. En fait, on peut sans difficulté se passer de la condition $u_0 \leq 1$ à condition de considérer $u_0/\|u_0\|_\infty$ comme condition initiale. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 5.2. *On suppose que w vérifie la condition (Q). Soit $u(t, x)$ la solution de l'équation (1) avec condition initiale $u_0 = w/\|w\|_\infty$. Alors pour tous $\lambda \in]0, 1[$, $\varepsilon \in]0, f'(0)[$, $\gamma > 0$ et $\Gamma > 0$, il existe $T_{\lambda, \varepsilon, \gamma, \Gamma} > 0$ tel que*

$$E_\lambda^u(t) \subset w^{-1} \left(\left[\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}, \Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t} \right] \right), \quad \forall t \geq T_{\lambda, \varepsilon, \gamma, \Gamma}.$$

Dans les faits, T dépend aussi de $\|w\|_\infty$, mais on omet cette dépendance dans la mesure où la condition initiale n'est pas une variable. Cette dépendance est également omise dans les théorèmes 5.3 et 5.4.

Démonstration. Les réels $\lambda, \varepsilon, \gamma, \Gamma$ étant fixés, on pose $\Gamma' = \Gamma/\|w\|_\infty$ et $\gamma' = \gamma/\|w\|_\infty$. Le théorème 1.15 est valide et donne qu'il existe $T_{\lambda, \varepsilon, \gamma', \Gamma'} > 0$ tel que

$$E_\lambda^u(t) \subset \left(\frac{w}{\|w\|_\infty} \right)^{-1} \left(\left[\gamma' e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}, \Gamma' e^{-(f'(0)-\varepsilon)t} \right] \right), \quad \forall t \geq T_{\lambda, \varepsilon, \gamma', \Gamma'}.$$

Or,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{w}{\|w\|_\infty} \right)^{-1} \left(\left[\gamma' e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}, \Gamma' e^{-(f'(0)-\varepsilon)t} \right] \right) \\ &= w^{-1} \left(\left[\gamma e^{-(f'(0)+\varepsilon)t}, \Gamma e^{-(f'(0)-\varepsilon)t} \right] \right). \end{aligned}$$

d'où le résultat pour $t \geq T_{\lambda, \varepsilon, \gamma, \Gamma} := T_{\lambda, \varepsilon, \gamma', \Gamma'}$, où l'on a omis la dépendance en $\|w\|_\infty$ de T . \square

La condition (Q) va permettre d'expliciter deux conditions supplémentaires sur v_0 qui, dans un certain sens, rendent cette fonction "à queue lourde selon la direction X ". Plus précisément, on fera l'hypothèse que

$$v_0(X, Y) \leq \bar{u}_0(X) \Gamma_0(Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

où \bar{u}_0 est une fonction vérifiant la condition (Q). On verra que (23) permet d'obtenir la borne supérieure pour l'encadrement de l'ensemble de niveau de n , noté $E_\mu^n(t)$ et défini par (11). Ce n'est toutefois pas suffisant pour que v se propage à vitesse sur-linéaire, comme le montre l'exemple d'une fonction v_0 à support compact et le corollaire 2.6. Pour capturer complètement le phénomène de queue lourde, et pour avoir la borne inférieure de $E_\mu^n(t)$, il faut en plus supposer qu'il existe $\sigma > 0$ tel que

$$v_0(X, Y) \geq \underline{u}_0(X), \quad \forall X \in]-\sigma, \sigma[, \forall Y \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

où \underline{u}_0 est une fonction vérifiant la condition (Q).

Pour justifier la dénomination de fonction v_0 "à queue lourde selon la direction X ", on peut remarquer que les conditions (23) et (24) impliquent que la fonction $X \mapsto \int_{\mathbb{R}} v_0(X, Y) dY$ est à queue lourde en $X \rightarrow +\infty$, et même vérifie les hypothèses de la proposition 1.12.

5.2 Estimations de l'ensemble de niveau

Les théorèmes ci-après constituent le résultat principal de ce rapport, et c'est pourquoi ils sont exposés dans une section à part entière. Les preuves étant très longues, elles seront données dans la section suivante.

On rappelle que l'ensemble de niveau μ de n , noté $E_\mu^n(t)$, est défini par (11).

Théorème 5.3. *On suppose que $\lambda_0 < 0$ et que $v_0(X, Y) \leq \bar{u}_0(X)\Gamma_0(Y)$ où \bar{u}_0 vérifie la condition (Q).*

Alors pour tous $\mu > 0$, $\varepsilon \in]0, -\lambda_0[$ et $\gamma > 0$ il existe $T_{\mu, \varepsilon, \gamma}^ \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T_{\mu, \varepsilon, \gamma}^*$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy < \mu, \quad \forall x \geq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\lambda_0 + \varepsilon)t} \right\}.$$

On peut reformuler le résultat du théorème 5.3 en termes d'ensembles de niveau :

$$\sup E_\mu^n(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\lambda_0 + \varepsilon)t} \right\},$$

avec la convention $\sup \emptyset = -\infty$. En effet, contrairement à l'équation de Fisher-KPP en dimension 1, on ne sait pas a priori pour quelles valeurs de μ l'ensemble $E_\mu^n(t)$ est non vide quand $t \rightarrow +\infty$. Ce sera l'objet du corollaire 5.5. Le théorème 5.3 fournit donc une borne supérieure de l'ensemble de niveau $E_\mu^n(t)$. Le théorème 5.4 qui suit traite de la borne inférieure.

On rappelle quelques notations et résultats de la section 4.4. La valeur propre principale de $-\partial_{YY} - r(Y)$ sur $] -R, R[$ est notée λ_0^R , et elle converge vers λ_0 quand $R \rightarrow +\infty$. En particulier, si $\lambda_0 < 0$, il existe $R > 0$ tel que $\lambda_0^R < 0$.

Théorème 5.4. *On suppose que $\lambda_0 < 0$. Soit $\sigma > 0$ quelconque et $R > 0$ tel que $\lambda_0^R < 0$. On suppose que $v_0(X, Y) > \underline{u}_0(X)$ pour $(X, Y) \in \mathbb{R} \times] -\sigma, \sigma[$, où \underline{u}_0 vérifie la condition (Q).*

Alors il existe $\beta > 0$, tel que pour tous $\mu \in]0, \beta[$, $\varepsilon \in]0, -\lambda_0^R[$, $\Gamma > 0$, il existe $T_{\mu, \varepsilon, \Gamma, R}^ \geq 0$ tel que pour $t \geq T_{\mu, \varepsilon, \Gamma, R}^*$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy > \mu, \quad \forall x \leq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\lambda_0^R - \varepsilon)t} \right\}.$$

On peut reformuler le résultat du théorème 5.3 en termes d'ensembles de niveau :

$$\inf E_\mu^n(t) \geq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\lambda_0^R - \varepsilon)t} \right\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Contrairement au théorème 5.3, le théorème 5.4 ne fournit une borne inférieure de $E_\mu^n(t)$ que pour les petites valeurs de $\mu > 0$. On ne sait donc pas comment se répartit la population n dans la partie envahie de l'espace. On sait juste que, en un $x \in \mathbb{R}$ fixé, la population totale en x vérifie :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy \geq \beta.$$

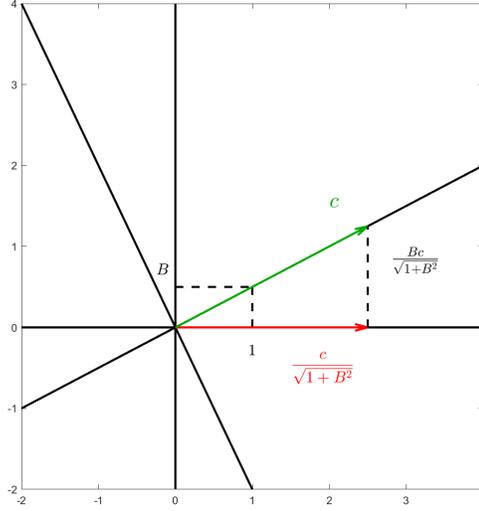


FIGURE 5 – Si une population se propage à vitesse c dans la direction X (en vert), sa projection sur la direction x se propage à la vitesse $c/\sqrt{1+B^2}$ (en rouge).

Le lecteur intéressé par la question peut se référer aux sections 6.1 et 6.2, où on tente d'apporter une réponse à cette question.

En conjuguant les théorèmes 5.3 et 5.4 (ainsi que leurs hypothèses), on obtient l'encadrement suivant pour $E_\mu^n(t)$:

Corollaire 5.5. *On se place sous les hypothèses des théorèmes 5.3 et 5.4. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tous $\mu \in]0, \beta[$, $\varepsilon \in]0, -\lambda_0^R[$, $\Gamma > 0$ et $\gamma > 0$, il existe $T^{**} = \max(T_{\mu, \varepsilon, \Gamma, R}^*, T_{\mu, \varepsilon, \gamma}^*) \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T^{**}$, l'ensemble $E_\mu^n(t)$ est compact non vide et*

$$E_\mu^n(t) \subset \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \left[\min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(-\lambda_0^R - \varepsilon)t} \right\}, \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(-\lambda_0 + \varepsilon)t} \right\} \right]$$

En d'autres termes, on obtient une estimation similaire au théorème 1.15. Le facteur $(1+B^2)^{-1/2}$ est dû au changement de repère : la direction de propagation est X , mais on décrit la vitesse de propagation de n après intégration en y , donc en projetant depuis l'axe X sur l'axe x . Cette projection entraîne la présence du facteur $(1+B^2)^{-1/2}$ (Figure 5).

Les théorèmes ci-dessus ne traitent que du cas $\lambda_0 < 0$. Si $\lambda_0 > 0$ et que $v_0(X, Y) \leq k\Gamma_0(Y)$ pour un $k > 0$ fixé, on a extinction de la population exponentiellement vite d'après le théorème 2.4. C'est donc en particulier le cas si $\lambda_0 > 0$ et que v_0 vérifie les hypothèses des théorèmes 5.3 et 5.4.

Ainsi, dans le cas où v_0 est “à queue lourde selon la direction X ”, i.e. vérifie les hypothèses des théorèmes 5.3 et 5.4, on voit que le signe de λ_0 détermine encore si on a survie et invasion de la population quand $t \rightarrow +\infty$, ou bien son extinction.

5.3 Preuves des théorèmes 5.3 à 5.5

5.3.1 Deux propositions préliminaires

Avant de passer aux démonstrations des théorèmes, on montre deux propriétés utiles pour les fonctions vérifiant la conditions (Q).

Proposition 5.6. *Soit w une fonction qui vérifie la condition (Q). Alors il existe $\xi_1 > \xi_0$ tel que $w(x) > w(\xi_1)$ pour tout $x < \xi_1$.*

Démonstration. On pose $m = \inf_{]-\infty, \xi_0]} w$. Montrons que $m > 0$. Comme $\liminf_{-\infty} w > 0$, il existe $x_- \in \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{]-\infty, x_-]} w \geq \frac{1}{2} \liminf_{-\infty} w > 0.$$

Par ailleurs, $w > 0$ sur le compact $[x_-, \xi_0]$, donc $\inf_{[x_-, \xi_0]} w > 0$. Ainsi, on a bien $m > 0$.

Comme $\lim_{+\infty} w = 0$, il existe $x_+ > \xi_0$ tel que $w(x_+) < m$. Il existe alors $\xi_1 \geq x_+$ tel que $w'(\xi_1) < 0$. En effet, comme w est décroissante sur $[\xi_0, +\infty[$, nier l'existence d'un tel ξ_1 entraînerait que $w' = 0$ sur $[x_+, +\infty[$, et donc $\lim_{+\infty} w = w(x_+) > 0$, ce qui contredit la condition (Q).

Il reste à montrer que ce ξ_1 convient. Pour tout $x < \xi_1$, on a

$$w(\xi_1) \begin{cases} \leq w(x_+) < m \leq w(x), & \text{si } x \leq \xi_0, \\ < w(x), & \text{si } x \in]\xi_0, \xi_1[, \end{cases}$$

car $w'(\xi_1) < 0$. D'où le résultat. \square

On passe à la seconde proposition, qui sera très utile pour obtenir une majoration (resp. minoration) sur $\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy$ à partir d'une majoration (resp. minoration) de $E_{\lambda}^u(t)$ où u vérifie (1).

Proposition 5.7. *Soit w une fonction vérifiant la condition (Q). Alors, pour tous $0 < \alpha < \beta$, $\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}, \chi > 0$, il existe $t^* \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t^*$ on a $\Gamma_{\alpha} e^{-\alpha t}$ et $\Gamma_{\beta} e^{-\beta t}$ dans $]0, \liminf_{-\infty} w[$, et*

$$\min w^{-1} \{ \Gamma_{\alpha} e^{-\alpha t} \} + \chi \leq \min w^{-1} \{ \Gamma_{\beta} e^{-\beta t} \}.$$

Démonstration. Il est évident qu'il existe $t^*(\alpha, \beta, \Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}, \chi) \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t^*$ on a

$$\Gamma_{\alpha} e^{-\alpha t}, \Gamma_{\beta} e^{-\beta t} \in]0, \liminf_{-\infty} w[.$$

En particulier, pour $t \geq t^*$, les ensembles $w^{-1} \{ \Gamma_{\alpha} e^{-\alpha t} \}$ et $w^{-1} \{ \Gamma_{\beta} e^{-\beta t} \}$ sont compacts de \mathbb{R} et donc on peut considérer leur minimum.

Pour la deuxième assertion, raisonnons par l'absurde : supposons que

$$\exists \Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \chi > 0, \forall t^*, \exists t \geq t^* \quad \min w^{-1} \{ \Gamma_\alpha e^{-\alpha t} \} + \chi > \min w^{-1} \{ \Gamma_\beta e^{-\beta t} \}.$$

On peut alors construire une suite réelle croissante $(t_n)_n$ avec $t_n \rightarrow +\infty$ telle que l'inégalité ci-dessus soit vérifiée en tout $t = t_n$. Comme $\liminf_{x \rightarrow -\infty} w(x) > 0$, $w > 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ assez grand,

$$\Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} \leq w(\xi_1),$$

d'où, par la proposition 5.6, on en déduit

$$\min w^{-1} \{ \Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} \} \geq \xi_1 \geq \xi_0.$$

Or, comme $\beta > \alpha$, en prenant $n \geq N$ avec N éventuellement encore plus grand, on a

$$\Gamma_\beta e^{-\beta t_n} \leq \frac{\Gamma_\alpha}{2} e^{-\alpha t_n} < \Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n}$$

et donc

$$\min w^{-1} \{ \Gamma_\beta e^{-\beta t_n} \} > \min w^{-1} \{ \Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} \}$$

par décroissance de w sur $[\xi_0, +\infty[$.

Soit $n \geq N$. On applique le théorème des accroissements finis à w sur l'intervalle

$$[\min w^{-1} \{ \Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} \}, \min w^{-1} \{ \Gamma_\beta e^{-\beta t_n} \}]$$

On a alors l'existence d'un θ_n dans cet intervalle tel que

$$w'(\theta_n) = \frac{\Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} - \Gamma_\beta e^{-\beta t_n}}{\min w^{-1} \{ \Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} \} - \min w^{-1} \{ \Gamma_\beta e^{-\beta t_n} \}} < 0$$

et donc

$$\begin{aligned} |w'(\theta_n)| &\geq \frac{\Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} - \Gamma_\beta e^{-\beta t_n}}{\chi} \\ &\geq \frac{\Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n}}{2\chi}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme w vérifie (Q), la proposition 1.14 nous donne que $w'(x) = o(w(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$. Donc pour $\epsilon = \Gamma_\alpha/4\chi$ il existe $x_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \geq x_\epsilon$ $|w'(x)| \leq \epsilon w(x)$. En prenant N éventuellement encore plus grand, on peut assurer que $\theta_n > x_\epsilon$. Ainsi, comme w est décroissante sur $[\xi_0, +\infty[$:

$$|w'(\theta_n)| \leq \epsilon w(\theta_n) \leq \epsilon w(\min w^{-1} \{ \Gamma_\alpha e^{-\alpha t_n} \}) = \frac{\Gamma_\alpha}{4\chi} e^{-\alpha t_n},$$

ce qui contredit l'inégalité précédente. D'où le résultat. \square

On peut maintenant commencer les preuves des théorèmes 5.3 à 5.5.

5.3.2 Preuve du théorème 5.3

On a tout d'abord besoin d'un lemme, qui montre que l'estimation de la borne supérieure de $E_\lambda^u(t)$ du théorème 1.15 est encore valable si $u = \phi$ est la solution du problème de Cauchy $\partial_t \phi - \partial_{XX} \phi = \Lambda \phi$ avec $\Lambda > 0$ et pour condition initiale \bar{u}_0 .

Lemme 5.8. *Soient $\Lambda > 0$ et ϕ la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t \phi - \partial_{XX} \phi = \Lambda \phi, & t > 0, X \in \mathbb{R}, \\ \phi(0, X) = \bar{u}_0(X), & X \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où u_0 vérifie la condition (Q). Pour $\eta > 0$ on pose $E_\eta^\phi(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(t, X) = \eta\}$ l'ensemble de niveau η de ϕ .

Alors pour tous $\varepsilon > 0$ et $\gamma > 0$ il existe $T_{\eta, \varepsilon, \gamma} \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T_{\eta, \varepsilon, \gamma}$ on a $E_\eta^\phi(t)$ non vide et

$$\sup E_\eta^\phi(t) \leq \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon)t} \right\}.$$

Preuve du lemme 5.8. La preuve, et particulièrement la construction de la sur-solution, s'inspire largement de [8].

L'ensemble $E_\eta^\phi(t)$ est non vide pour t assez grand. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\|\phi(t, \cdot)\|_\infty \rightarrow +\infty, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty, \quad (25)$$

et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \phi(t, X) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (26)$$

Pour montrer (25), on remarque que $\phi(t, X) = e^{\Lambda t} h(t, X)$ où h est solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale \bar{u}_0 . On peut donc exprimer $h(t, X)$ comme la convolution du noyau de la chaleur avec \bar{u}_0 :

$$h(t, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(X-Z)^2/4t} \bar{u}_0(Z) dZ.$$

On pose $\ell = \frac{1}{2} \liminf_{-\infty} \bar{u}_0 > 0$. Par définition de la limite inférieure, il existe $X_\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{u}_0(X) \geq \ell$ pour $X \leq X_\ell$. Ainsi pour tout $t \geq X_\ell^2/4$, on a

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) &= e^{\Lambda t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{Z^2}{4t}} \bar{u}_0(Z) dZ \\ &\geq e^{\Lambda t} \int_{-\infty}^{X_\ell} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{Z^2}{4t}} \bar{u}_0(Z) dZ \\ &\geq \ell e^{\Lambda t} \int_{-\infty}^{X_\ell/2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} ds \\ &\geq \ell e^{\Lambda t} \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} ds \right), \end{aligned}$$

d'où $\phi(t, 0) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. On en déduit (25).

Pour montrer (26), on pourrait faire de même que dans [8] et utiliser les estimations standard paraboliques, mais on préfère utiliser une méthode plus directe qui utilise moins de prérequis. Soit $t > 0$ et $\delta > 0$ fixés, et soit $\zeta > 0$ tel que

$$e^{\Lambda t} \|\bar{u}_0\|_\infty \int_\zeta^{+\infty} e^{-Z^2} dZ < \delta,$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \phi(t, X) &= e^{\Lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{Z^2}{4t}} \bar{u}_0(X - Z) dZ \\ &= e^{\Lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} \bar{u}_0(X - 2s\sqrt{t}) ds \\ &\leq \delta + e^{\Lambda t} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} \bar{u}_0(X - 2s\sqrt{t}) ds. \end{aligned}$$

Or, comme $\lim_{+\infty} \bar{u}_0 = 0$, il existe $X_{\delta, t}$ tel que pour tout $X \geq X_{\delta, t}$ on a $\bar{u}_0(X) \leq \delta e^{-\Lambda t}$. Donc pour $X \geq X_{\delta, t} + 2\zeta\sqrt{t}$, on a

$$\begin{aligned} \phi(t, X) &\leq \delta + \delta \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} ds \\ &\leq 2\delta \end{aligned}$$

d'où (26). Ainsi, pour tout $\eta > 0$ il existe t_η tel que pour $t \geq t_\eta$ on a $E_\eta^\phi(t) \neq \emptyset$.

La fonction $\phi(t, x)$ envahit l'espace, i.e. $\sup E_\eta^\phi(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Soit $K > \eta$. Soit w la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_{xx} w = \Lambda w \left(1 - \frac{w}{K}\right), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors il est clair que w est une sous-solution de l'opérateur $\partial_t - \partial_{xx} - \Lambda$. Du fait que ϕ est sur-solution de ce même opérateur, et que $w(0, x) \leq \phi(0, x)$, le principe de comparaison linéaire (théorème 1.3) donne que $w \leq \phi$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Par ailleurs, on voit que $\tilde{w} = w/K$ est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w} - \partial_{xx} \tilde{w} = \Lambda \tilde{w} (1 - \tilde{w}), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{w}(0, x) = \bar{u}_0(x)/K, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De plus, comme \bar{u}_0 vérifie la condition (Q), il est aisé de vérifier que $\tilde{w} = \bar{u}_0/K$ la vérifie aussi. En particulier, \tilde{w} vérifie les conditions de la proposition 1.12, donc pour tout $\lambda \in]0, 1[$

$$\sup E_\lambda^{\tilde{w}}(t) \rightarrow +\infty, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

C'est en particulier le cas pour $\lambda = \eta/K$. Ainsi, on a

$$\sup E_\eta^\phi \geq \sup E_\eta^w(t) = \sup E_{\eta/K}^{\tilde{w}} \rightarrow +\infty, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Construction d'une sur-solution. Soit $\rho = \Lambda + \frac{\varepsilon}{2}$, et $\xi_2 \in [\xi_0, +\infty[$ tel que $|\bar{u}_0(X)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \bar{u}_0''(X)$ pour $X \geq \xi_2$. On pose

$$\bar{\phi}(t, X) = \|\bar{u}_0\|_\infty \frac{\bar{u}_0(X)}{\bar{u}_0(\xi_2)} e^{\rho t}.$$

Montrons que $\phi \leq \bar{\phi}$ sur $[0, +\infty[\times [\xi_2, +\infty[$. On va appliquer le principe de comparaison linéaire sur l'ouvert connexe $\Omega :=]0, +\infty[\times]\xi_2, +\infty[$, pour l'opérateur parabolique $\partial_t - \partial_{XX} - \Lambda$.

Tout d'abord, vérifions que $\phi \leq \bar{\phi}$ sur le bord parabolique de Ω , donné par

$$\partial_p \Omega = (\{0\} \times [\xi_2, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times \{\xi_2\}).$$

D'une part, en $t = 0$, on a immédiatement que pour tout $X \geq \xi_2$:

$$\phi(0, X) = \bar{u}_0(X) \leq \bar{u}_0(X) \frac{\|\bar{u}_0\|_\infty}{\bar{u}_0(\xi_2)} = \bar{\phi}(0, X).$$

D'autre part, on a vu que $\phi(t, X) = h(t, X)e^{\Lambda t}$ avec h la solution de l'équation de la chaleur avec pour condition initiale \bar{u}_0 . Ainsi, en $X = \xi_2$, on a pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \phi(t, \xi_2) &\leq \|\phi(t, \cdot)\|_\infty \\ &\leq \|h(t, \cdot)\|_\infty e^{\Lambda t} \\ &\leq \|\bar{u}_0\|_\infty e^{\Lambda t} \\ &\leq \|\bar{u}_0\|_\infty e^{\rho t} \\ &\leq \bar{\phi}(t, \xi_2). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $\bar{\phi}$ est une sur-solution de $\partial_t - \partial_{XX} - \Lambda$ sur Ω . Pour tous $(t, X) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\phi} - \partial_{XX} \bar{\phi} - \Lambda \bar{\phi} &= \frac{\|\bar{u}_0\|_\infty}{\bar{u}_0(\xi_2)} e^{\rho t} (\rho \bar{u}_0(X) - \bar{u}_0''(X) - \Lambda \bar{u}_0(X)) \\ &= \frac{\|\bar{u}_0\|_\infty}{\bar{u}_0(\xi_2)} e^{\rho t} \left(\frac{\varepsilon}{2} \bar{u}_0(X) - \bar{u}_0''(X) \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

par notre choix de ξ_2 . Par le principe de comparaison linéaire, on a donc $\phi \leq \bar{\phi}$ sur Ω , donc sur $\bar{\Omega} = [0, +\infty[\times [\xi_2, +\infty[$ par continuité.

Conclusion. Soit $t \geq t_\eta$ de sorte que $E_\eta^\phi(t)$ soit non vide. On pose $X_\eta(t) := \sup E_\eta^\phi(t)$. D'après ce qui précède, on a $X_\eta(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc il existe $t'_\eta \geq t_\eta$ tel que pour $t \geq t'_\eta$, on a $X_\eta(t) \geq \xi_2$. Alors

$$\begin{aligned} \phi(t, X_\eta(t)) &\leq \bar{\phi}(t, X_\eta(t)) \\ \eta &\leq \|\bar{u}_0\|_\infty \frac{\bar{u}_0(X_\eta(t))}{\bar{u}_0(\xi_2)} e^{\rho t} \\ \bar{u}_0(X_\eta(t)) &\geq \eta \frac{\bar{u}_0(\xi_2)}{\|\bar{u}_0\|_\infty} e^{-\rho t}, \end{aligned}$$

Donc pour tout $\gamma > 0$, il existe $T_{\eta, \gamma, \varepsilon} \geq t'_\eta$ tel que pour tout $t \geq T_{\eta, \gamma, \varepsilon}$, on a

$$\bar{u}_0(X_\eta(t)) \geq \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon)t}.$$

Finalement, par décroissance de \bar{u}_0 sur $[\xi_2, +\infty[$, on obtient le résultat :

$$\sup E_\eta^\phi(t) \leq \min \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon)t} \right\}.$$

La démonstration du lemme est terminée. \square

On peut maintenant se tourner vers la preuve du théorème 5.3.

Démonstration du théorème 5.3. On pose $\Lambda = -\lambda_0 > 0$, et $\bar{v}(t, X, Y) = \phi(t, X)\Gamma_0(Y)$ avec ϕ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \phi - \partial_{XX} \phi = \Lambda \phi, & t > 0, X \in \mathbb{R}, \\ \phi(0, X) = \bar{u}_0(X), & X \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Preuve que $v \leq \bar{v}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$. En $t = 0$ c'est clair par hypothèse. Ensuite, on vérifie que \bar{v} est une sur-solution de l'opérateur $\partial_t - \partial_{XX} - \partial_{YY} - r(Y)$:

$$\begin{aligned} & \partial_t \bar{v} - \partial_{XX} \bar{v} - \partial_{YY} \bar{v} - r(Y) \bar{v} \\ &= (\partial_t \phi - \partial_{XX} \phi + \lambda_0 \phi) \Gamma_0 \\ &= (\Lambda \phi + \lambda_0 \phi) \Gamma_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

tandis que

$$\partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v - r(Y)v = -v \int v(t, X, Y) dy \leq 0.$$

On conclut par le principe de comparaison linéaire (théorème 9.9 en annexe) que $v \leq \bar{v}$.

Majoration de $\sup E_\eta^\phi(t)$. On rappelle qu'il existe des constantes $C, \kappa > 0$ telles que pour tous t, X, Y :

$$v(t, X, Y) \leq C e^{-\kappa \sqrt{1+B^2}|Y|},$$

Soit $\delta > 0$ et $\zeta > 0$ assez grand pour que

$$\sqrt{1+B^2} \int_{-\infty}^{-\zeta} C e^{-\kappa \sqrt{1+B^2}|s|} ds \leq \delta.$$

Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy &= \int v(t, X, Y) dy \\
&= \int v\left(t, \frac{x + By}{\sqrt{1 + B^2}}, \frac{y - Bx}{\sqrt{1 + B^2}}\right) dy \\
&= \sqrt{1 + B^2} \int v(t, \sqrt{1 + B^2}x + Bs, s) ds \\
&\leq \delta + \sqrt{1 + B^2} \int_{-\zeta}^{\infty} \bar{v}(t, \sqrt{1 + B^2}x + Bs, s) ds \\
&\leq \delta + \sqrt{1 + B^2} \int_{-\zeta}^{\infty} \phi(t, \sqrt{1 + B^2}x + Bs) \Gamma_0(s) ds.
\end{aligned}$$

Soit x tel que

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{1 + B^2}} \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon)t} \right\}.$$

En appliquant la proposition 5.7 à \bar{u}_0 avec

$$\begin{cases} \alpha = \Lambda + \varepsilon/2, & \beta = \Lambda + \varepsilon > \alpha, \\ \Gamma_\alpha = \Gamma_\beta = \gamma, & \chi = B\zeta, \end{cases}$$

il existe $t^*(\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \alpha, \beta, \chi) = t_{\varepsilon, \gamma, \zeta}^* \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_{\varepsilon, \gamma, \zeta}^*$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + B^2}x - B\zeta &\geq \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon)t} \right\} - B\zeta \\
&\geq \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon/2)t} \right\}.
\end{aligned}$$

Soit $\eta \in]0, 1[$. Le lemme 5.8 donne l'existence d'un $T_{\eta, \varepsilon/2, \gamma} \geq 0$ tel que pour $t \geq T_{\eta, \varepsilon/2, \gamma}$ on a

$$\begin{aligned}
\sup E_\eta^\phi(t) &\leq \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon/2)t} \right\} \\
&\leq \sqrt{1 + B^2}x - B\zeta.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout $s > -\zeta$, on a $\phi(t, \sqrt{1 + B^2}x - Bs) < \eta$. En effet, supposons qu'il existe $x_0 > \sqrt{1 + B^2}x - B\zeta$ tel que $\phi(t, x_0) \geq \eta$. Comme $\phi(t, X) \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$ d'après la proposition (1.12), il existerait nécessairement un $x_1 \in E_\eta^\phi(t) \cap]x_0, +\infty[$, ce qui contredirait l'inégalité ci-dessus.

Conclusion. Finalement pour $t \geq \max(t_{\varepsilon, \gamma, \zeta}^*, T_{\eta, \varepsilon/2, \gamma})$ et pour tout $x \geq \frac{1}{\sqrt{1 + B^2}} \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda + \varepsilon)t} \right\}$, on a $\phi(t, \sqrt{1 + B^2}x - Bs) \leq \eta$ pour $s \geq -\zeta$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy &\leq \delta + \eta \sqrt{1 + B^2} \int_{-\zeta}^{\infty} \Gamma_0(s) ds \\
&\leq \delta + \eta \sqrt{1 + B^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_0(s) ds. \tag{27}
\end{aligned}$$

Soit $\mu > 0$. En choisissant $\eta > 0$ tel que

$$\eta\sqrt{1+B^2} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0 < \mu,$$

et δ tel que

$$0 < \delta < \mu - \eta\sqrt{1+B^2} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0,$$

alors (27) entraîne $\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy < \mu$.

Finalement, comme ζ est une fonction de δ , et que δ et η dépendent uniquement de μ , il existe $T_{\mu, \varepsilon, \gamma}^* := \max(t_{\varepsilon, \gamma, \zeta}^*, T_{\eta, \varepsilon/2, \gamma})$, tel que pour tout $t \geq T_{\mu, \varepsilon, \gamma}^*$,

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(\Lambda+\varepsilon)t} \right\} \implies \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy < \mu.$$

Ceci conclut la preuve du théorème 5.3. \square

5.3.3 Preuve du théorème 5.4

Avant de passer à la preuve du théorème, on aura besoin d'un lemme.

Lemme 5.9. *Soit \underline{u}_0 qui vérifie la condition (Q). Alors il existe une fonction $\underline{u}_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

- $\underline{u}_0 \leq \underline{u}_0$,
- il existe $\xi_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{u}_0 = \underline{u}_0$ sur $[\xi_2, +\infty[$,
- \underline{u}_0 vérifie (Q),
- \underline{u}_0 est C^2 sur \mathbb{R} et il existe $K > 0$ tel que $|\underline{u}_0''| \leq K \underline{u}_0$ sur \mathbb{R} .

Preuve du lemme 5.9. On rappelle que d'après la proposition 5.6, il existe $\xi_1 > \xi_0$ tel que $\underline{u}_0(X) \geq \underline{u}_0(\xi_1)$ pour tout $X \leq \xi_1$. Soit $h > 0$ tel que $\xi_1 \geq \xi_0 + h$.

Soit $\xi_2 > \xi_1$ tel que $\underline{u}_0(\xi_2) < \underline{u}_0(\xi_1)$ et $|\underline{u}_0''(X)| \leq \underline{u}_0(X)$ pour $X \geq \xi_2$, ce qui est possible car \underline{u}_0 vérifie (Q). Enfin, on pose $\phi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ la fonction

$$\phi(x) := \begin{cases} x & 0 < x \leq \underline{u}_0(\xi_2), \\ m - C \sin^3(\omega(\underline{u}_0(\xi_1) - x)) & \underline{u}_0(\xi_2) \leq x \leq \underline{u}_0(\xi_1), \\ m & x \geq \underline{u}_0(\xi_1), \end{cases}$$

avec

$$\omega = \frac{\arctan \sqrt{2}}{\underline{u}_0(\xi_1) - \underline{u}_0(\xi_2)}, \quad C = \frac{\sqrt{3}}{2\omega}, \quad m = \underline{u}_0(\xi_2) + C\sqrt{\frac{8}{27}} < \underline{u}_0(\xi_1)$$

Ainsi construite, on peut vérifier que $\phi \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$ et que ϕ est croissante.

On pose alors $\underline{u}_0 = \phi \circ \underline{u}_0$. Du fait que $\phi'' \leq 0$ sur $[\underline{u}_0(\xi_2), \underline{u}_0(\xi_1)]$, on en déduit que $\phi(x) \leq x$ sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, on a $\underline{u}_0 \leq \underline{u}_0$ sur \mathbb{R} . Par ailleurs, pour $X \geq \xi_2$, on a $\underline{u}_0(X) \leq \underline{u}_0(\xi_2)$ donc $\underline{u}_0(X) = \underline{u}_0(X)$.

Montrons que \underline{u}_0 est C^2 sur \mathbb{R} . Sur $]\xi_1 - h, +\infty[$ on a $\underline{u}_0 C^2$ (car $\xi_0 \leq \xi_1 - h$) donc \underline{u}_0 est C^2 par composition. Sur $] - \infty, \xi_1]$ on a $\underline{u}_0(X) \geq \underline{u}_0(\xi_1)$ d'où $\underline{u}_0(X) = h$, qui est clairement C^2 . D'où \underline{u}_0 est C^2 sur \mathbb{R} .

Montrons que \underline{u}_0 vérifie (Q), i.e.

1. \underline{u}_0 est uniformément continue et bornée sur \mathbb{R} ,
2. $\liminf_{-\infty} \underline{u}_0 > 0$, $\underline{u}_0 > 0$, $\lim_{+\infty} \underline{u}_0 = 0$,
3. $\exists \tilde{\xi}_0 \in \mathbb{R}$ tel que \underline{u}_0 soit C^2 et décroissante sur $[\tilde{\xi}_0, +\infty[$,
4. $\underline{u}_0''(x) = o(\underline{u}_0(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Comme \underline{u}_0 et ϕ sont uniformément continues et que ϕ est bornée, il est clair que 1. est vrai pour \underline{u}_0 . Ensuite, comme $\underline{u}_0 = \underline{u}_0$ sur $[\xi_2, +\infty[$ et que \underline{u}_0 vérifie (Q), on a immédiatement 3. et 4. ainsi que $\lim_{+\infty} \underline{u}_0 = 0$. Par ailleurs, $\phi > 0$ entraîne $\underline{u}_0 > 0$. Enfin, comme $\underline{u}_0(X) \geq \underline{u}_0(\xi_1)$ pour $X \leq \xi_1$, on a $\liminf_{-\infty} \underline{u}_0 \geq \underline{u}_0(\xi_1)$, et donc

$$\liminf_{X \rightarrow -\infty} \underline{u}_0(X) = m > 0,$$

d'où \underline{u}_0 vérifie 2. et donc vérifie (Q).

Montrons que \tilde{u}_0 est C^2 sur \mathbb{R} . Sur $]\xi_1 - h, +\infty[$ on a $u_0 C^2$ (car $\xi_0 \leq \xi_1 - h$) donc \tilde{u}_0 est aussi C^2 sur cet intervalle par composition. Sur $] - \infty, \xi_1]$ on a $u_0(X) \geq u_0(\xi_1)$ d'où $\tilde{u}_0(X) = h$, qui est clairement C^2 . D'où le résultat.

Finalement, il reste à montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $-\underline{u}_0'' \leq K\underline{u}_0$. D'après notre choix de ξ_2 , on a

$$|\underline{u}_0''(X)| \begin{cases} = 0 < u_0(X) & \forall X \leq \xi_1, \\ = |\underline{u}_0''(X)| \leq \underline{u}_0(X) = u_0(X) & \forall X \geq \xi_2, \end{cases}$$

Or, \underline{u}_0 étant C^2 et strictement positive sur $[\xi_1, \xi_2]$, on peut trouver $k > 0$ tel que

$$|\underline{u}_0''(X)| \leq k \min_{[\xi_1, \xi_2]} \underline{u}_0 \leq k\underline{u}_0(X)$$

On a donc $-\underline{u}_0'' \leq K\underline{u}_0$ sur \mathbb{R} en posant $K = \max(1, k)$. \square

On peut maintenant passer à la preuve du théorème 5.4. Elle se fait en deux étapes. Tout d'abord, on part de $v_0(X, Y) > \underline{u}_0(X)$ sur une bande étroite $\mathbb{R} \times] - \sigma, \sigma[$, et on construit une sous-solution qui nous donne que $v_0(X, Y) > \text{Cte} \underline{u}_0(X) \Gamma_0^R(Y)$ sur la bande $\mathbb{R} \times] - R, R[$, qui est plus large puisque par hypothèse $R > 0$ a été pris suffisamment grand pour que $\lambda_0^R < 0$. Ensuite, on construit une sous-solution sur $\mathbb{R} \times] - R, R[$ qui donne le résultat attendu.

Démonstration du théorème 5.4. Quelques préliminaires. On rappelle qu'on a pris $R > 0$ suffisamment grand pour que $\lambda_0^R < 0$, avec λ_0^R la valeur propre principale de $-\partial_{YY} - r(Y)$ sur $] - R, R[$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\sigma + \alpha > R$. Soit enfin $p(t, Y)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t p - \partial_{YY} p = 0, & t \in]0, 1], Y \in] - \sigma - \alpha t, \sigma + \alpha t[, \\ p(t, Y) = 0, & t \in]0, 1], Y = \pm \sigma \pm \alpha t, \\ p(0, Y) = 1 - (Y/\sigma)^2, & Y \in] - \sigma, \sigma[. \end{cases}$$

On sait que p est définie sur $[0, 1] \times] - \sigma, \sigma[$, et C^∞ sur $]0, 1] \times] - \sigma, \sigma[$.

On rappelle ensuite quelques majorations. Il existe $N_\infty > 0$ tel que pour tous t, x :

$$\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} v(t, X, Y) dy \leq N_\infty.$$

De plus, il existe $r_{min} \in \mathbb{R}$ tel que $r(Y) \geq r_{min}$ pour $|Y| \leq \sigma + \alpha$. En prenant $R \geq 1/\sqrt{A(1+B^2)}$, on peut assurer que $r_{min} \leq 0$.

Soit enfin \underline{u}_0 la fonction construite à partir de \underline{u}_0 à partir du lemme 5.9. On rappelle qu'on a alors l'existence d'un $K > 0$ tel que $|\underline{u}_0''(X)| \leq K\underline{u}_0(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}$.

La sous-solution pour $t \in [0, 1]$. On pose

$$\underline{v}(t, X, Y) := e^{-kt} \underline{u}_0(X) p(t, Y),$$

$$k := K - r_{min} + N_\infty > 0,$$

$$\Omega := \{(t, X, Y) \mid 0 < t < 1, X \in \mathbb{R}, Y \in]-\sigma - \alpha t, \sigma + \alpha t]\}.$$

Montrons que $v \geq \underline{v}$ sur $\bar{\Omega}$. On va appliquer un principe de comparaison sur l'ouvert connexe Ω .

Tout d'abord, vérifions que $v \geq \underline{v}$ sur le bord parabolique de Ω , donné par

$$\partial_p \Omega = (\{0\} \times \mathbb{R} \times [-\sigma, \sigma]) \cup (]0, 1] \times \mathbb{R} \times \{-\sigma - \alpha t\}) \cup (]0, 1] \times \mathbb{R} \times \{\sigma + \alpha t\}).$$

D'une part, en $t = 0$, on a immédiatement que pour tous $(X, Y) \in \mathbb{R} \times [-\sigma, \sigma]$,

$$v_0(X, Y) \geq \underline{u}_0(X) \geq \underline{u}_0(X) \geq \underline{u}_0(X) p(0, Y) = \underline{v}(0, X, Y).$$

D'autre part, sur $]0, 1] \times \mathbb{R} \times \{\pm\sigma \pm \alpha t\}$, on a $\underline{v} = 0$ d'après les conditions aux limites de p . Or, pour $t > 0$, on a $v(t, \cdot, \cdot) > 0$ par le théorème 4.3. Ainsi, on a bien $v \geq \underline{v}$ sur tout $\partial_p \Omega$.

Il reste à montrer que $v - \underline{v}$ est une sur-solution d'un problème parabolique sur Ω . D'une part, pour $t \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v &= r(Y)v - v \int v(t, X, Y) dy \\ &\geq (r_{min} - N_\infty)v. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $-\underline{u}_0'' \leq K\underline{u}_0$, on a

$$\begin{aligned} &\partial_t \underline{v} - \partial_{XX} \underline{v} - \partial_{YY} \underline{v} \\ &= e^{-kt} \left[-k\underline{u}_0 p + \underline{u}_0 \partial_t p - p \underline{u}_0'' - \underline{u}_0 \partial_{YY} p \right] \\ &= e^{-kt} \left[(r_{min} - N_\infty) \underline{u}_0 p + (-K\underline{u}_0 - \underline{u}_0'') p \right] \\ &\leq (r_{min} - N_\infty) \underline{v} \end{aligned}$$

Donc par le principe de comparaison (théorème 1.3), on a bien $v \geq \underline{v}$ sur $\bar{\Omega}$.

Transition à une nouvelle sous-solution. On a donc $v(1, X, Y) \geq e^{-k} \underline{u}_0(X) p(1, Y)$ sur $[-\sigma - \alpha, \sigma + \alpha]$. Par une extension du principe du maximum fort à un domaine non cylindrique (cf théorème 9.8 en annexe), on a également que $p(t, Y) > 0$ sur $]-\sigma - \alpha t, \sigma + \alpha t[$. En particulier, comme $R < \sigma + \alpha t$, on a existence d'un réel $p_{min} > 0$ tel que $p(1, Y) \geq p_{min}$ pour $Y \in [-R, R]$. Comme $\|\Gamma_0^R\|_\infty = 1$, on en déduit que

$$v(1, X, Y) \geq e^{-k} p_{min} \underline{u}_0(X) \Gamma_0^R(Y), \quad \forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in [-R, R].$$

Soit $\rho > 0$ tel que $\rho < \|\underline{u}_0\|_\infty e^{-k} p_{min}$. On se réserve le droit de choisir ρ éventuellement plus petit si besoin. On pose $\Lambda^R = -\lambda^R - \varepsilon/2 > 0$. Pour $t \geq 1$ et $X, Y \in \mathbb{R}$, on définit

$$\underline{w}(t, X, Y) := \rho u(t, X) \Gamma_0^R(Y),$$

où $u(t, X)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{XX} = \Lambda^R u(1 - u), & t > 0, X \in \mathbb{R}, \\ u(1, X) = \underline{u}_0(X) / \|\underline{u}_0\|_\infty, & X \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On rappelle que comme $u(1, X) \in [0, 1]$, on a donc $u(t, X) \in [0, 1]$.

La sous-solution pour $t \in [1, +\infty[$. En $t = 1$, on a

$$\begin{aligned} v(1, X, Y) &\geq e^{-k} p_{min} \underline{u}_0(X) \Gamma_0^R(Y) \\ &> \rho \frac{\underline{u}_0(X)}{\|\underline{u}_0\|_\infty} \Gamma_0^R(Y) \\ &\geq \rho u(1, X) \Gamma_0^R(Y), \end{aligned}$$

par notre choix de ρ . Donc $v(1, X, Y) > \underline{w}(1, X, Y)$ sur \mathbb{R}^2 .

Supposons par l'absurde que l'espace $E = \{t > 1 \mid \exists (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \ v(t, X, Y) = \underline{w}(t, X, Y)\}$ soit non vide. On pose $t_0 := \min E \in E$ car E est fermé. En particulier, $t_0 > 1$. Soit $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2$ le point où $v(t_0, X_0, Y_0) = \underline{w}(t_0, X_0, Y_0)$. Soit $M > 2$ tq $|Y_0| \leq M$. On rappelle qu'on a toujours la majoration suivante via l'inégalité de Harnack généralisée :

$$\int_{\mathbb{R}} v(t_0, X, Y) dy \leq C_M v(t_0, X_0, Y_0) + \frac{3C}{\kappa} e^{-\kappa M},$$

avec $C, \kappa > 0$ les constantes telles que $v(t, X, Y) \leq C e^{-\kappa \sqrt{1+B^2}|Y|}$ par le théorème 4.2. On prend M assez grand pour que

$$\frac{3C}{\kappa} e^{-\kappa M} < -\varepsilon/8.$$

Etant donné que $(\underline{w} - v)$ est strictement négative sur $[1, t_0] \times \mathbb{R}^2$, elle atteint son maximum sur $[1, t_0] \times \mathbb{R}^2$ au point (t_0, X_0, Y_0) . Ainsi, on a

$$[\partial_t(\underline{w} - v) - \partial_{XX}(\underline{w} - v) - \partial_{YY}(\underline{w} - v) - r(Y_0)(\underline{w} - v)](t_0, X_0, Y_0) \geq 0, \quad (28)$$

le terme $r(Y_0)(\underline{w} - v)$ étant nul en (t_0, X_0, Y_0) , car $\underline{w}(t_0, X_0, Y_0) = v(t_0, X_0, Y_0)$.
D'une part, on a

$$\begin{aligned} -[\partial_t v - \partial_{XX} v - \partial_{YY} v - r(Y)v](t_0, X_0, Y_0) &= v(t_0, X_0, Y_0) \int v(t_0, X_0, Y_0) dy \\ &\leq C_M \underline{w}(t_0, X_0, Y_0)^2 + \frac{3C}{\kappa} e^{-\kappa M} \underline{w}(t_0, X_0, Y_0). \end{aligned}$$

D'autre part, on a pour \underline{w} l'inégalité

$$\begin{aligned} &\partial_t \underline{w} - \partial_{XX} \underline{w} - \partial_{YY} \underline{w} - r(Y) \underline{w} \\ &= \rho (\partial_t u - \partial_{XX} u + \lambda_0^R u) \Gamma_0^R \\ &\leq \rho (\Lambda^R u + \lambda_0^R u) \Gamma_0^R \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{2} \underline{w}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (28) entraîne :

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\varepsilon}{2} \underline{w}(t_0, X_0, Y_0) + C_M \underline{w}(t_0, X_0, Y_0)^2 + \frac{3C}{\kappa} e^{-\kappa M} \underline{w}(t_0, X_0, Y_0) \\ &\leq \left[-\frac{\varepsilon}{2} + C_M \underline{w}(t_0, X_0, Y_0) + \frac{3C}{\kappa} e^{-\kappa M} \right] \underline{w}(t_0, X_0, Y_0) \\ &\leq \left[-\frac{\varepsilon}{2} + C_M \rho + \frac{3C}{\kappa} e^{-\kappa M} \right] \\ &\leq \left[-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \right] \underline{w}(t_0, X_0, Y_0), \end{aligned}$$

si on choisit ρ assez petit pour que $C_M \rho < \varepsilon/8$. Finalement, on trouve $-\varepsilon \underline{w}(t_0, X_0, Y_0)/4 \geq 0$. Ceci implique que $\underline{w}(t_0, X_0, Y_0) = v(t_0, X_0, Y_0) \leq 0$, ce qui est absurde car $v > 0$ pour $t > 0$. Contradiction. Donc $\underline{w}(t, X, Y) < v(t, X, Y)$ pour tous $t \geq 1$ et $X, Y \in \mathbb{R}$.

Minoration de $\inf E_\eta^u(t)$. Du fait que $\underline{w} < v$, on obtient pour tout $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy &\geq \int_{\mathbb{R}} \underline{w}(t, X, Y) dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \rho u(t, X) \Gamma_0^R(Y) dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \rho u \left(t, \frac{x + By}{\sqrt{1 + B^2}} \right) \Gamma_0^R \left(\frac{y - Bx}{\sqrt{1 + B^2}} \right) dy \\ &\geq \sqrt{1 + B^2} \rho \int_{\mathbb{R}} u(t, \sqrt{1 + B^2}x + Bs) \Gamma_0^R(s) ds \\ &\geq \sqrt{1 + B^2} \rho \int_{-R}^R u(t, \sqrt{1 + B^2}x + Bs) \Gamma_0^R(s) ds. \end{aligned}$$

Soit x tel que

$$\sqrt{1 + B^2}x \leq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/2)t} \right\}.$$

En appliquant la proposition 5.7 à \underline{u}_0 avec

$$\begin{cases} \alpha = \Lambda^R - \varepsilon/2, & \beta = \Lambda^R - \varepsilon/4 > \alpha, \\ \Gamma_\alpha = \Gamma, & \Gamma_\beta = \Gamma/\|\underline{u}_0\|_\infty, \\ \chi = BR, \end{cases}$$

on obtient, pour $s \in [-R, R]$ et pour $t \geq t^*(\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \alpha, \beta, \chi) = t_{\Gamma, R, \varepsilon}^*$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + B^2x} + Bs &\leq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/2)t} \right\} + Bs \\ &\leq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/2)t} \right\} + BR \\ &\leq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \frac{\Gamma}{\|\underline{u}_0\|_\infty} e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/4)t} \right\}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\eta \in]0, 1[$. La remarque qui suit la proposition 1.12 montre que pour tout $c > 0$, on a $\inf_{X \leq ct} u(t, X) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$. Ainsi, il existe $\mathbf{t}_{\eta, \Lambda^R} = \mathbf{t}_{\eta, R}$ tel que pour tout $t \geq \mathbf{t}_{\eta, R}$ on a 0

$$\liminf_{X \rightarrow -\infty} u(t, X) > \eta$$

Posons $\Gamma' = \Gamma/\|\underline{u}_0\|_\infty$. Comme $u(t, X)$ est la solution de l'équation de Fisher-KPP avec condition initiale $\underline{u}_0/\|\underline{u}_0\|_\infty$, on en déduit par le théorème 1.15, qu'il existe $T_{\eta, \varepsilon/4, \Gamma', \Lambda^R} \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T_{\eta, \varepsilon/4, \Gamma', \Lambda^R}$, on a

$$\inf E_\eta^u(t) \geq \min \left(\frac{\underline{u}_0}{\|\underline{u}_0\|_\infty} \right)^{-1} \left\{ \Gamma' e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/4)t} \right\}.$$

On note que T dépend de Λ^R . Dans l'énoncé du théorème 1.15, il est clair que T dépend aussi $f'(0)$, mais cette dépendance a été omise du fait que la fonction f a été fixée au départ. Ici, $f(u) = \Lambda^R u(1 - u)$ et on ne peut plus omettre cette dépendance.

Finalement, pour

$$T^* := \max(t_{\Gamma, R, \varepsilon}^*, \mathbf{t}_{\eta, R}, T_{\eta, \varepsilon/4, \Gamma', \Lambda^R}),$$

on a, pour $t \geq T^*$:

$$\begin{aligned} \inf E_\eta^u(t) &\geq \min \left(\frac{\underline{u}_0}{\|\underline{u}_0\|_\infty} \right)^{-1} \left\{ \Gamma' e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/4)t} \right\} \\ &\geq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/4)t} \right\} \\ &\geq \sqrt{1 + B^2x} + BR \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $s \in]-R, R[$, on a $u(t, \sqrt{1 + B^2x} + Bs) > \eta$. En effet, s'il existait $s_0 \in]-R, R[$ tel que $u(t, \sqrt{1 + B^2x} + Bs_0) \leq \eta$, comme

$\liminf u(t, X) > \eta$ quand $X \rightarrow -\infty$, on trouverait nécessairement un $x_1 \in E_\eta^\phi(t) \cap]-\infty, \sqrt{1+B^2x} + Bs_0[$, ce qui contredirait l'inégalité ci-dessus.

Conclusion. Finalement, pour tout x tel que

$$\sqrt{1+B^2x} \leq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/2)t} \right\},$$

et pour tout $t \geq T^*$, on a $u(t, \sqrt{1+B^2x} + Bs) \geq \eta$ pour tout $s \in [-R, R]$. On en déduit que

$$\int n(t, x, y) dy \geq \sqrt{1+B^2\rho\eta} \int_{-R}^R \Gamma_0^R(s) ds.$$

On pose

$$\beta := \sqrt{1+B^2\rho} \int_{-R}^R \Gamma_0^R(s) ds.$$

Or, pour tout $\mu \in]0, \beta[$ il existe $\eta = \eta(\mu, R) \in]0, 1[$ tel que

$$\sqrt{1+B^2\rho\eta} \int_{-R}^R \Gamma_0^R(s) ds > \mu$$

et donc pour $t \geq T^*$, on a

$$\sqrt{1+B^2x} \leq \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\Lambda^R - \varepsilon/2)t} \right\} \implies \int n(t, x, y) dy > \mu.$$

Enfin, \underline{u}_0 étant fixée, T^* est une fonction de $\Gamma, R, \varepsilon, \eta, \Lambda^R$, donc de $\mu, \varepsilon, \Gamma, R$, au vu de notre choix de η et le fait que $\Lambda^R = \lambda^R - \varepsilon/2$ est une fonction de ε et de R . Ceci conclut la preuve du théorème 5.4. \square

5.3.4 Preuve du corollaire 5.5

On a préféré ne pas introduire les ensembles de niveau $E_\mu^n(t)$ dans les démonstrations des théorèmes 5.3 et 5.4. La raison est que pour certaines valeurs de μ , ces ensembles peuvent être vides pour de grandes valeurs de t . Seule l'application conjuguée des deux théorèmes permet de dire que $E_\mu^n(t)$ est non vide en temps grand, pour $\mu \in]0, \beta[$.

Comme pour les preuves des théorèmes 5.3 et 5.4, on commence par un lemme :

Lemme 5.10. *Soit $t \geq 0$ fixé. L'application $N_t: x \mapsto \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy$ est strictement positive et continue.*

Preuve du lemme 5.10. Le fait que N_t soit strictement positive est clair car $n > 0$ pour $t > 0$.

Soit $x_\infty \in \mathbb{R}$ et montrons que N_t est continue en x_∞ . Soit une suite $(x_m)_m$ dans \mathbb{R} telle que $x_m \rightarrow x_\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$. En toute généralité, on peut supposer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x_m, x_\infty \in]a, b[$ pour tout m . On a

$$|N_t(x_\infty) - N_t(x_m)| \leq \int_{\mathbb{R}} |n(t, x_\infty, y) - n(t, x_m, y)| dy$$

On applique le théorème de convergence dominée. On a bien $n(t, x_m, y) \rightarrow n(t, x_\infty, y)$ quand $m \rightarrow +\infty$ par continuité de n . De plus, comme $n(t, x, y) \leq Ce^{-\kappa|y-Bx|}$ par le théorème 4.2, on obtient que pour tout $x \in [a, b]$

$$n(t, x, y) \leq \Pi(y) := \begin{cases} Ce^{-K|y-Ba|} & y \leq Ba \\ C & y \in [Ba, Bb] \\ Ce^{-K|y-Bb|} & y \geq Bb \end{cases}$$

et la fonction Π est intégrable. D'où le résultat. \square

Remarquons qu'on peut exprimer l'ensemble de niveau μ de n par $E_\mu^n(t) = N_t^{-1}\{\mu\}$. En particulier, $E_\mu^n(t)$ est vide ssi $\mu \notin \text{Im}(N_t)$.

Démonstration du corollaire 5.5. Par application des théorèmes 5.3 et 5.4, on a que pour $t \geq T^{**}$,

$$\begin{aligned} x &\leq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\lambda_0^R - \varepsilon)t} \right\} \implies N_t(x) > \mu, \\ x &\geq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(-\lambda_0 + \varepsilon)t} \right\} \implies N_t(x) < \mu. \end{aligned}$$

Par continuité de N_t sur \mathbb{R} , on en déduit que $N_t^{-1}\{\mu\}$ est non vide et que

$$E_\mu^n(t) = N_t^{-1}\{\mu\} \subset \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \left[\min \underline{u}_0^{-1} \left\{ \Gamma e^{-(\lambda_0^R - \varepsilon)t} \right\}, \max \bar{u}_0^{-1} \left\{ \gamma e^{-(-\lambda_0 + \varepsilon)t} \right\} \right].$$

En particulier, $E_\mu^n(t)$ est borné, et fermé par continuité de N_t . C'est donc un compact de \mathbb{R} . \square

6 Autres résultats et simulations numériques

6.1 Existence d'une solution stationnaire

Lorsque $B = 0$, le modèle (8)-(9) devient un cas particulier du modèle étudié dans [5]. La situation est alors beaucoup plus simple, comme on l'a exposé à la fin de la section 2.1. On dispose alors de beaucoup plus de résultats, qu'on va dans un premier temps exposer ici.

Remarquons d'abord que, si $B = 0$, on a $\lambda_0 < 0$ ssi $A < 1$. Le premier résultat traite des solutions stationnaires de (8), sans condition initiale, i.e. des solutions stationnaires de

$$\partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = \left[(1 - Ay^2) - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy \right] n. \quad (29)$$

Théorème 6.1 ([5], théorème 1.1). *On suppose $B = 0$ et $\lambda_0 = \sqrt{A} - 1 < 0$. Alors il existe une unique solution stationnaire $n(x, y)$ de (29) qui soit strictement positive et bornée. De plus, cette solution ne dépend pas de x . On la note $S(y)$.*

Un résultat remarquablement précis sur le problème de Cauchy (8)-(9) est le suivant :

Théorème 6.2 ([5], théorème 1.2). *On suppose $B = 0$ et $\lambda_0 = \sqrt{A} - 1 < 0$. On suppose que n_0 est lisse, et on se donne une solution $n \geq 0$ de (8)-(9).*

Alors n envahit l'espace avec un profil asymptotique $S(y)$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x, y) = S(y)$. De plus, cette invasion se produit à la vitesse asymptotique $c^ = 2\sqrt{-\lambda_0} > 0$, dans le sens où*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sup_{|x| \geq ct, y \in \mathbb{R}} n(t, x, y) \right) = 0, \quad \forall c > c^*,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sup_{|x| \leq ct, y \in \mathbb{R}} |n(t, x, y) - S(y)| \right) = 0, \quad \forall c < c^*.$$

Il est donc naturel d'essayer de transposer ces résultats au cadre $B \neq 0$. Comme la solution $v(t, X, Y)$ envahit l'espace selon la direction X , on s'attend à ce qu'un profil limite stationnaire soit atteint, et que ce profil ne dépende que de Y .

Dans la pratique, la preuve du théorème 6.1 n'est plus valide si $B \neq 0$. La principale difficulté est de prouver l'unicité d'une solution stationnaire de (19), ce qui est nécessaire pour obtenir un résultat de convergence.

Pourtant, le théorème ci-dessous exhibe une solution stationnaire de 19 qui ne dépend que de Y , et des simulations numériques laissent penser que $v(t, X, Y)$ converge effectivement vers ce front quand v_0 est à support compact. L'aspect numérique sera détaillé dans la prochaine section.

Théorème 6.3. *La fonction $v(X, Y) = k_0 \Gamma_0(Y)$ est une solution stationnaire de (19) avec*

$$k_0 = \frac{-\lambda_0}{\sqrt{1+B^2} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0(Y) dY} > 0.$$

Démonstration. Si on injecte cette expression dans l'équation (13), on obtient

$$-k_0 \partial_{YY} \Gamma_0(Y) - k_0 r(Y) \Gamma_0(Y) = -k_0 \Gamma_0(Y) \int_{\mathbb{R}} k_0 \Gamma_0 \left(\frac{y - Bx}{\sqrt{1+B^2}} \right) dy,$$

$$\lambda_0 k_0 \Gamma_0(Y) = -k_0^2 \Gamma_0(Y) \sqrt{1+B^2} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_0(s) ds,$$

ainsi, on obtient bien l'égalité pour le k_0 ci-dessus. \square

Remarque. On dispose des expressions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma_0(Y) dY = \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{A(1+B^2)}}}, \quad k_0 = \frac{-\lambda_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{A}{1+B^2} \right)^{1/4}.$$

Niveau μ	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
Vit. théorique de $E_\mu^n(t)$	0.81864	0.81864	0.81864	0.81864	0.81864	0.81864
Vit. numérique de $E_\mu^n(t)$	0.74661	0.76357	0.76999	0.78458	0.79088	0.80566

TABLE 1 – Comparaison de la vitesse numérique et de la vitesse théorique pour les petites valeurs de μ , avec n_0 à support compact et $A = B = 1/2$.

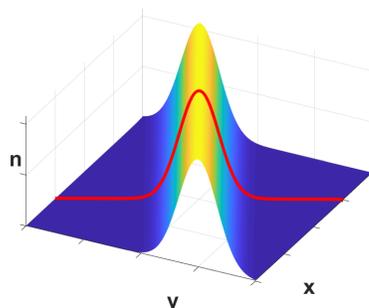


FIGURE 6 – Profil asymptotique de la solution. En rouge, le profil $k\Gamma_0(Y)$.

6.2 Simulations numériques

Dans un premier temps, des simulations numériques de l'équation (1) ont été réalisées. Un simple schéma d'Euler explicite permet d'observer les résultats de convergence des théorèmes 1.7 et 1.9, avec la bonne vitesse de propagation asymptotique.

Dans le cadre de l'équation (8), étant donné qu'on n'a pas prouvé l'unicité de la solution, on ne cherchera pas à montrer la convergence du schéma numérique. On se contente de vérifier qu'on retrouve bien la vitesse asymptotique de propagation (Tableau 1). Par le théorème 2.5, on sait que la vitesse de propagation est $\omega = 2\sqrt{-\frac{\lambda_0}{1+B^2}}$. Toutefois, cette vitesse ne concerne que les niveaux $\mu < \beta$. Ceci explique pourquoi on observe uniquement les petits niveaux μ .

Comme annoncé, l'approximation numérique de $v(t, X, Y)$ converge localement vers le profil $k\Gamma_0(Y)$ (Figure 6).

6.3 Hair Trigger Effect pour l'accélération

On rappelle que pour une équation de réaction-diffusion, on parle de Hair Trigger Effect si pour toute condition initiale $u_0 \geq 0, \neq 0$, on a survie et invasion de la population. C'est le cas pour l'équation de Fisher-KPP (1) (théorème 1.7), et pour le modèle (8) (théorème 2.5).

On peut vérifier que le théorème 5.4 est encore vrai si $v_0(X, Y) > \underline{u}_0(X)$ pour $(X, Y) \in \mathbb{R} \times]a, b[$ avec $a < b$ quelconques. En particulier, cela entraîne une accélération de l'invasion. On peut y voir une analogie avec le Hair Trigger Effect,

où l'on demande $u_0(x_0) > 0$ en un point x_0 quelconque pour avoir invasion, ou encore $u_0 > 0$ sur un intervalle $]a, b[$ quelconque.

La différence notable est que pour avoir accélération dans une direction donnée, il faut une dimension “de plus” sur la condition de Hair Trigger Effect : celle correspondant à la direction de propagation, ici X .

Troisième partie

Perspectives

7 Effet Allee

7.1 Présentation du modèle

Dans cette section, on considère le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = f(u), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (30)$$

où f est une fonction C^1 qui vérifie

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0, \\ f(s) > 0, & s \in]0, 1[, \\ f'(0) = 0, \end{cases} \quad (31)$$

avec la condition supplémentaire suivante : il existe $s_0 \in]0, 1[, \beta > 0, r > 0, \delta > 0$ tels que

$$rs^{1+\beta}(1-s^\delta) \leq f(s) \leq rs^{1+\beta}, \quad \forall s \in [0, s_0[. \quad (32)$$

Enfin, la condition initiale $u_0: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est supposée uniformément continue et avoir la forme d'un front, i.e.

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0, \quad u_0 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 0. \quad (33)$$

Ce modèle n'est plus dans le cadre Fisher-KPP. En effet, $f'(0) = 0$ et donc le rapport $f(s)/s$ n'est plus maximal pour $s \rightarrow 0$. On parle alors d'effet Allee. Cela modélise la difficulté pour une population à se reproduire lorsque la densité est trop faible, ce qui peut être dû à la difficulté à trouver un partenaire pour la reproduction, ou un manque de diversité génétique. L'effet Allee est d'autant plus fort que β est grand.

7.2 Préliminaires

Si on pose v la solution de (30) avec condition initiale $v_0 = \eta \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}$ avec $\eta > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on montre dans [14] que v envahit l'espace dans la direction $x \rightarrow +\infty$ avec une certaine vitesse $c_0 > 0$ indépendante de η : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{x \leq c_0 t} v(t, x) = 1$. Si on choisit η tel que $v_0 \leq u_0$, alors par le principe de comparaison non-linéaire, on obtient $v(t, x) \leq u(t, x)$, donc en particulier

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{x \leq c_0 t} u(t, x) = 1.$$

Par ailleurs, on peut montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) \rightarrow 0$ pour tout $t > 0$. En effet, il existe $\Lambda > 0$ tel que $f(s) \leq \Lambda s$. Ainsi, u est sous-solution du problème $\partial_t w - \partial_{xx} w - \Lambda w$, et on a prouvé que la solution w de ce problème tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ (cf preuve de la proposition 1.12).

Ainsi, on vient de montrer que l'ensemble de niveau λ de u , défini par

$$E_\lambda(t) := \{x \in \mathbb{R} \mid u(t, x) = \lambda\},$$

est compact et non vide quand t est suffisamment grand. Plus précisément, on vient de prouver le résultat suivant :

Théorème 7.1. *Toute solution de (30)-(33) envahit l'espace avec une vitesse au moins c_0 . Si on pose*

$$E_\lambda(t) := \{x \in \mathbb{R} \mid u(t, x) = \lambda\},$$

l'espace de niveau λ de u , alors il existe $t_\lambda \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_\lambda$, l'ensemble $E_\lambda(t)$ est compact, non vide, et inclus dans $[c_0 t, +\infty[$.

Autrement dit, on est encore en présence d'un Hair Trigger Effect, et c_0 est la vitesse minimale d'invasion. L'effet Allee n'empêche donc pas l'invasion de l'état $u \equiv 1$, mais ralentit la vitesse de celle-ci. La vitesse c_0 est en effet d'autant plus faible que β est élevé.

7.3 Cas où u_0 est à queue lourde

On sait que l'effet Allee a tendance à ralentir la vitesse d'invasion, tandis qu'une queue lourde sur u_0 a tendance à l'accélérer. Il est alors naturel de se demander quel effet va l'emporter sur l'autre. Cette question a été étudiée dans [1], et le cas limite est obtenu pour les queues algébriques, i.e. $u_0(x) \sim C/x^\alpha$ pour un $\alpha > 0$, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 7.2. *Soit $\alpha > 0$.*

— *On suppose que $\beta \geq 1/\alpha$ et que $u_0(x) \leq C/x^\alpha$ sur $[x_0, +\infty[$ pour un $C > 0$ et un $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Alors il n'y a pas d'accélération : il existe $c > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, il existe $T_\lambda \geq t_\lambda$ tel que

$$E_\lambda(t) \subset]c_0 t, ct[, \quad \forall t \geq T_\lambda.$$

— *On suppose que $\beta < 1/\alpha$ et que $u_0(x) \geq C/x^\alpha$ sur $[x_0, +\infty[$ pour un $C > 0$ et un $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Alors pour tous $\lambda \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $T_{\lambda, \varepsilon} \geq t_\lambda$ tel que

$$E_\lambda(t) \subset]x^-(t), +\infty[, \quad \forall t \geq T_{\lambda, \varepsilon}, \quad x^-(t) := ((r - \varepsilon)C^\beta \beta t)^{\frac{1}{\alpha\beta}}.$$

En particulier, dans le dernier cas, la vitesse est sur-linéaire : $x^-(t)/t \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. On a donc accélération.

Remarque. Comme le principe de comparaison (non-linéaire) est valide, il est immédiat que si la queue de u_0 est plus légère que toute queue algébrique, i.e.

$$u_0(x)x^\alpha = 0, \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty,$$

alors l'effet Allee l'emporte toujours, quelle que soit la valeur de β .

A l'inverse, si la queue de u_0 est plus lourde que toute queue algébrique, i.e.

$$u_0(x)x^\alpha \rightarrow +\infty, \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty,$$

alors l'accélération a toujours lieu, quelle que soit la valeur de β .

7.4 Problème posé

Au vu de ces résultats, il est naturel de se demander si on peut les généraliser à la dimension supérieure. Pour $\beta > 0$, on considère donc le modèle :

$$\begin{cases} \partial_t n - \partial_{xx} n - \partial_{yy} n = [\tilde{r}(x, y) - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'] n^{1+\beta}, & t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ n(0, x, y) = n_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où $\tilde{r}(x, y) = 1 - A(y - Bx)^2$, avec $A, B > 0$.

La puissance $1 + \beta$ est la généralisation naturelle de l'effet Allee. La première étape sera de déterminer si on est encore en présence d'un Hair Trigger Effect, i.e. si on a encore invasion dans la direction $X \rightarrow +\infty$ pour toute condition initiale $n_0 \geq 0, \neq 0$.

Il faudra ensuite déterminer si on peut montrer un analogue du théorème 7.2, avec les bonnes conditions de queue lourde sur n_0 . Au vu de (23), on peut supposer que la condition $u_0(x) \leq C/x^\alpha$ devienne $\bar{u}_0(X) \leq C/X^\alpha$ (et de même pour la condition $u_0(x) \geq C/x^\alpha$). Il n'est toutefois pas certain que la fonction Γ_0 joue le même rôle dans ce nouveau modèle, car à cause de l'effet Allee, nous ne sommes plus dans le cadre Fisher-KPP. On renvoie à la section 8.5 pour plus de détails.

Conclusion

Au cours de ce rapport, nous avons étudié une équation de réaction-diffusion qui modélise l'évolution d'une population soumise aux effets de migration, de mutation, de reproduction et de compétition non-locale en le phénotype, dans le cas particulier où le trait phénotypique optimal dépend linéairement de l'espace.

Nous avons déterminé un encadrement de la vitesse asymptotique de propagation d'une solution, dans le cas où la condition initiale possède une queue lourde en espace. Nous avons également dégagé des pistes quant à l'état stationnaire atteint une fois que la population a envahi l'espace.

Ce stage m'a donné en premier lieu l'occasion d'acquérir des connaissances et de l'expérience en matière d'EDP paraboliques et de fronts d'invasion dans les équations de réaction-diffusion. Mais surtout, ce stage m'a permis d'être en contact avec différents chercheurs et doctorants, et ainsi d'avoir une vision plus large des thématiques de recherche mathématiques, notamment en dynamique des populations et en neurosciences.

Enfin, ce stage m'a procuré un éclairage sur le monde de l'enseignement et de la recherche, ce qui a renforcé ma motivation à poursuivre dans cette voie.

Annexe

8 Éléments propres d'un opérateur elliptique

Dans toute cette partie, on prend $N \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert connexe régulier de \mathbb{R}^N .

On renvoie à [6] pour les sections 8.1, 8.2 et 8.4. La section 8.3 s'appuie sur [4].

8.1 Opérateur elliptique du second ordre

Définition 8.1. On dit que L est un opérateur elliptique (du second ordre) sur Ω s'il s'écrit sous la forme

$$Lu := \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_i u + c(x)u.$$

avec $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$.

Dans toute la suite, on considèrera que

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\Omega).$$

Définition 8.2. Soit L un opérateur elliptique sur Ω . On dit que L est uniformément elliptique sur Ω s'il existe $\nu > 0$ tel que pour tous $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $x \in \Omega$ on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \nu |\xi|^2.$$

Typiquement, $Lu = \Delta u$ est un opérateur uniformément elliptique.

8.2 Éléments propres d'un opérateur elliptique

Dans cette partie, on suppose que Ω est borné.

Définition 8.3. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $-L$ s'il existe une solution faible w non triviale de

$$\begin{cases} -Lw = \lambda w, & \text{sur } \Omega, \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Toute fonction w vérifiant les conditions ci-dessus est dite une fonction propre associée à λ .

Par solution faible, on entend $w \in H^1(\Omega)$ tel que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j} (\partial_i w) \partial_j (a_{ij} \varphi) - \sum_i (b_i \partial_i w) \varphi - cw\varphi \right] = \int_{\Omega} \lambda w \varphi.$$

Etant donné nos hypothèses de régularité sur a_{ij}, b_i, c , on peut montrer qu'alors $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et donc vérifie $-Lw = \lambda w$ au sens fort, i.e. $C^2(\Omega)$.

On dispose d'un résultat particulier sur les valeurs propres d'un opérateur elliptique, qui transpose dans une certaine mesure le théorème de Perron-Frobenius pour les matrices :

Théorème 8.4. *On suppose que L est uniformément elliptique sur Ω . Alors il existe une valeur propre réelle λ_0 de l'opérateur $-L$ telle que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une autre valeur propre, alors $\lambda_0 \leq \operatorname{Re}(\lambda)$, avec égalité ssi $\lambda = \lambda_0$. De plus, la valeur propre λ_0 est simple, i.e. une seule fonction propre y est associée à constante multiplicative près. Enfin λ_0 est caractérisée par l'existence d'une fonction propre strictement positive sur Ω .*

Définition 8.5. λ_0 est dite la valeur propre principale de $-L$.

Par exemple, pour $R > 0$, les valeurs propres de $-L = -\partial_{xx}$ défini sur $] -R, R[$ sont exactement les $\lambda_k = \left((k+1)\frac{\pi}{2R}\right)^2$ avec $k \in \mathbb{N}$, associées aux fonctions propres $w_k = \cos\left((k+1)\frac{\pi}{2R}x\right)$. La valeur propre principale de $-L$ est donc λ_0 car $\lambda_0 < \lambda_k$ si $k > 1$. On remarque qu'on a effectivement $w_k > 0$ sur $] -R, R[$ ssi $k = 1$.

8.3 Éléments propres généralisés

On a défini les éléments propres dans le cas Ω borné. Il est possible d'étendre cette notion dans des domaines Ω non bornés. Soit $L = a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$ un opérateur uniformément elliptique défini sur Ω . On suppose de plus que $a_{ij}, b_i, c \in C_{loc}^{0,\gamma}(\Omega)$, avec $0 < \gamma < 1$. Alors on peut définir un analogue de la valeur propre principale :

Définition 8.6. On appelle valeur propre principale généralisée (VPPG) de l'opérateur $-L$ le réel

$$\lambda_0(-L, \Omega) := \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \phi \in C^2(\Omega) \cap C_{loc}^1(\overline{\Omega}), \phi > 0, -L\phi \geq \lambda\phi \text{ dans } \mathbb{R}^N \right\},$$

où $C_{loc}^1(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions de $C_{loc}^1(\Omega)$ qui admettent un prolongement C^1 sur $\partial\Omega$.

On dit que ϕ_0 est une fonction propre principale généralisée (FPPG) de $-L$ sur Ω si

$$\begin{cases} -L\phi_0 = \lambda_0(-L, \Omega)\phi_0, & \text{sur } \Omega, \\ \phi_0 > 0, & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

En particulier, on n'impose pas que ϕ ou ϕ_0 soient bornées. On verra

Cette définition est effectivement une généralisation, comme le montre ce théorème :

Théorème 8.7. *Si Ω est borné, alors la valeur propre principale généralisée $\lambda_0(-L, \Omega)$ coïncide avec la valeur propre principale définie par le théorème 8.4.*

Le théorème suivant est utile pour déterminer la valeur propre principale généralisée de certains opérateurs :

Théorème 8.8. *Si $(\Omega_n)_n$ est une suite d'ouverts bornés connexes réguliers non vides tels que*

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega,$$

alors $\lambda_0(-L, \Omega_n) \searrow \lambda_0(-L, \Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

De plus, la suite des fonctions propres principales ϕ_0^n de $-L$ sur Ω_n converge dans $C_{loc}^{2, \tilde{\gamma}}$, avec $0 < \tilde{\gamma} < \gamma$, vers une FPPG ϕ_0 de $-L$ sur Ω . En particulier, il existe toujours une FPPG associée à la VPPG.

Par exemple, pour $L = \partial_{xx}$ défini sur \mathbb{R} , on a vu que $\lambda_0(-L,]-R, R[) = \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2$, donc $\lambda_0(-L, \mathbb{R}) = 0$.

Théorème 8.9. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une fonction $\phi \in C^2(\Omega) \cap C_{loc}^1(\bar{\Omega})$ telle que*

$$\begin{cases} -L\phi = \lambda\phi & \text{sur } \Omega, \\ \phi > 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Alors $\lambda = \lambda_0(-L, \Omega)$, et donc ϕ est une FPPG de $-L$ sur Ω .

Démonstration. Pour plus de concision, on pose $\lambda_0 = \lambda_0(-L, \Omega)$. De par l'existence de ϕ , on a déjà $\lambda \leq \lambda_0$. Supposons par l'absurde que $\lambda < \lambda_0$. Alors il existe un ouvert borné $\Omega_n \subset \Omega$ tel que $\lambda_0^n := \lambda_0(-L, \Omega_n)$ soit dans l'intervalle $] \lambda, \lambda_0[$. \square

Dans le cadre de ce rapport, les opérateurs elliptiques qu'on considère ont un terme d'ordre zéro $c \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, et non $L^\infty(\Omega)$. On peut étendre les définitions et théorèmes précédents au cas où $c \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ est majoré. On renvoie le lecteur à [2, 4] pour plus de détails.

8.4 Influence du signe de la valeur propre principale

Dans cette partie, on suppose que Ω est borné.

On suppose également que L s'écrive sous la forme

$$Lu := \sum_{1 \leq i, j \leq N} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$

avec $c \geq 0$ sur Ω .

Dans cette section, on montre que pour certaines EDP simples, le signe de λ_0 détermine si la solution tend vers zéro ou explose exponentiellement vite. On ne peut toutefois pas adapter ces résultats à notre modèle (8). Pourtant, même pour le modèle (8), il se trouve que le signe de λ_0 détermine la survie ou l'extinction de la population. Le but de cette section est donc d'illustrer ce phénomène dans des modèles simples et à expliquer pourquoi on s'inspire de λ_0 et d'une fonction propre associée dans nos preuves.

L'opérateur L ci-dessus est auto-adjoint, et on peut donc montrer un théorème similaire à la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts :

Théorème 8.10 (Diagonalisation d'un opérateur elliptique). *On suppose que L est uniformément elliptique sur Ω et vérifie les hypothèses ci-dessus. Alors toutes les valeurs propres de $-L$ sont réelles. Si on les note $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, en les comptant avec leur multiplicité, il existe une base orthonormale $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ où w_k est une fonction propre de $-L$ associée à λ_k .*

On rappelle que λ_0 est la valeur propre principale de $-L$, et qu'elle est simple. On a donc $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

On considère maintenant l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t u - Lu = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

avec $f, u_0 \in L^2(\Omega)$. On a existence et unicité d'une solution faible $u \in L^2([0, T]; H_0^1(\Omega))$ pour tout $T > 0$. Comme $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, on peut décomposer $u(t, \cdot)$ selon la base (w_k) :

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) w_k(x).$$

En réinjectant dans l'équation de départ, on trouve

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_k'(t) + \alpha_k(t)\lambda_k] w_k(x) = 0.$$

En projetant selon chaque composante w_k , on obtient un système d'EDO : $\alpha_k'(t) = -\lambda_k \alpha_k(t) + f_k$. Ainsi, $\alpha_k(t) = C_k e^{-\lambda_k t}$. Les constantes C_k sont en fait les coordonnées de u_0 dans la base (w_k) .

Supposons que $\lambda_0 > 0$. Alors pour tout k on a $\lambda_k > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 e^{-2\lambda_k t} \\ &\leq e^{-2\lambda_0 t} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 \\ &\leq e^{-2\lambda_0 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et donc $u(t, \cdot) \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$, avec une vitesse de convergence en $O(e^{-\lambda_0 t})$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Supposons maintenant que $\lambda_0 < 0$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_k < 0$ et $C_k \neq 0$, alors la norme $\alpha_k(t)$ explose exponentiellement, et de même pour la norme L^2 de $u(t, \cdot)$.

Par exemple, l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet correspond à $-L = -\partial_{xx}$ sur $[-R, R]$. Comme $\lambda_0(-L,]-R, R[) = (\frac{\pi}{2R})^2 > 0$, la solution u tend vers zéro. Toutefois, avec $-L' = -\partial_{xx} - (\frac{\pi}{R})^2$, on a $\lambda_0(-L',]-R, R[) = -(\frac{\pi}{2R})^2 < 0$, donc la solution peut ne pas exploser exponentiellement en temps.

8.5 Généralisation de la notion "fonction de type Fisher-KPP"

On considère l'équation

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = f(u),$$

avec $f \in C^1([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, et $f > 0$ sur $]0, 1[$. Une telle fonction f est dite monostable.

On rappelle que f est de type Fisher-KPP si en plus d'être monostable, on a $f'(0) > 0$ et $f(s) \leq f'(0)s$ (la condition $f'(1) < 0$ n'est pas nécessaire : elle ne sert que pour l'étude du portrait de phase, mais les conclusions par la méthode du principe du maximum sont identiques). On a vu que si f est de type Fisher-KPP, on est en présence d'un Hair Trigger Effect, i.e. toute condition initiale non nulle entraîne la survie et l'invasion de l'espèce.

Le cadre Fisher-KPP peut se généraliser en dimension supérieure. Plus précisément, si on considère, pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, l'équation

$$\partial_t u - Lu = f(x, u),$$

alors on dit qu'on est dans le cadre Fisher-KPP si

$$f(x, s) \leq \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0)s, \quad \forall x \in \Omega, \forall s \geq 0$$

et si la valeur propre principale (généralisée ou non) de l'opérateur $-L - \partial_s f(x, 0)$ sur Ω est strictement négative.

Dans le cadre de notre modèle (8), on a vu que si $\lambda_0 < 0$, alors on est encore en présence d'un Hair Trigger Effect, comme le montre le théorème 2.5. Ceci est dû au fait qu'on est encore dans le cadre Fisher-KPP, car

$$\left[\tilde{r}(x, y) - \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dy \right] n \leq r(x, y)n$$

et que la valeur propre principale généralisée de l'opérateur $-\partial_{xx} - \partial_{yy} - \tilde{r}(x, y)$ est encore λ_0 , comme cela est montré dans [2].

9 Principes du maximum paraboliques

Dans toute cette partie, on prend $N \in \mathbb{N}^*$, Ω un domaine (i.e. ouvert connexe) régulier de \mathbb{R}^N . On pose également $T > 0$ et D le cylindre $]0, T[\times \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$. En particulier D est un domaine, et D est borné ssi Ω est borné.

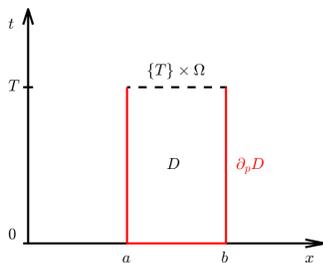


FIGURE 7 – Schéma du domaine $D =]0, T[\times]a, b[$, où $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$. En rouge, le bord parabolique de D .

Enfin, on définit le bord parabolique de D par :

$$\begin{aligned} \partial_p D &= (\{0\} \times \Omega) \cup (]0, T[\times \partial\Omega) \\ &= \partial D \setminus (\{T\} \times \Omega). \end{aligned}$$

On renvoie à la Figure 7 pour une illustration.

Les résultats des sections 9.2 à 9.4 sont issus de [11]. Ceux des sections 9.5 et 9.6 sont tirés de [13].

9.1 Opérateur parabolique du second ordre

Définition 9.1. On dit que P est un opérateur parabolique (du second ordre) sur D s'il s'écrit sous la forme

$$Pu := \partial_t u - Lu,$$

où

$$Lu := \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij}(t, x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^N b_i(t, x) \partial_i u + c(t, x) u,$$

avec $a_{ij}, b_i, c: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Sauf mention contraire, on supposera que

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij}, b_i, c \in C^0(\overline{D}) \cap L^\infty(D).$$

On peut donc voir P comme étant la différence entre ∂_t et un opérateur elliptique. La fonction u est supposée assez régulière pour que les expressions ci-dessus aient un sens, par exemple $u \in C^{1,2}(D)$ ou $u \in W^{1,2,p}(D)$.

Définition 9.2. Soit P un opérateur parabolique. On dit que P est uniformément parabolique sur D s'il existe $\nu > 0$ tel que pour tous $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $(t, x) \in D$ on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j > \nu |\xi|^2.$$

Typiquement, $P = \partial_t u - \Delta_x u$ est un opérateur uniformément parabolique.

Définition 9.3. Soit $u \in C^{1,2}(D)$. On dit que u est une sous-solution (resp. sous-solution) de l'opérateur P si on a $Pu \leq 0$ (resp. $Pu \geq 0$) sur D .

9.2 Principe de comparaison linéaire

Théorème 9.4 (Principe du maximum faible). *On suppose que D est borné. Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D avec $c(t, x) \leq 0$. Soit $u \in C^{1,2}(D) \cap C(\overline{D})$ tel que $Pu \leq 0$ sur Ω . Alors si $\max_{\overline{D}} u \geq 0$ on a*

$$\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial_p D} u.$$

Si $c(t, x) \equiv 0$, alors la condition $\max_{\overline{D}} u \geq 0$ n'est pas nécessaire.

En appliquant ce théorème à $-u$, on déduit le principe du minimum : si $Pu \geq 0$ et $\min_{\overline{D}} u \leq 0$ sur D , alors $\min_{\overline{D}} u = \min_{\partial_p D} u$. On notera bien que c'est le maximum sur le bord parabolique $\partial_p D$ qui importe.

Une conséquence importante du théorème 9.4 est le principe de comparaison suivant, valable sur les domaines bornés.

Corollaire 9.5 (Principe de comparaison linéaire (domaine borné)). *On suppose que D est borné. Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D . Soient $u, v \in C^{1,2}(D) \cap C(\overline{D})$. Alors*

$$\begin{cases} Pu \leq Pv, & (t, x) \in D, \\ u \leq v, & (t, x) \in \partial_p D, \end{cases} \implies u \leq v, \quad (t, x) \in D.$$

Remarque. On n'a pas besoin de l'hypothèse $c(t, x) \leq 0$. Si effectivement $c(t, x) \leq 0$, le résultat découle trivialement du principe du maximum faible. Sinon, si on pose $\alpha = \|c\|_{L^\infty(D)}$, et dans ce cas

$$\tilde{P}u := Pu + \alpha u = \partial_t u - Lu + \alpha u$$

vérifie les hypothèses du principe du maximum faible parabolique (car $c - \alpha \leq 0$). Il suffit alors d'appliquer le principe de comparaison avec \tilde{P} aux fonctions $\tilde{u} = e^{-\alpha t} u$ et $\tilde{v} = e^{-\alpha t} v$, pour avoir le résultat avec P .

Remarque. En particulier, si u est une sous-solution, si v est une sur-solution, et si $u \leq v$ sur $\partial_p D$, alors $u \leq v$ sur D .

9.3 Principe du maximum fort

Les théorèmes 9.6 et 9.7 ci-dessous se démontrent à partir du lemme de Hopf. On n'exposera pas le lemme de Hopf, car on n'en aura pas besoin dans le cadre de ce rapport.

Théorème 9.6 (Principe du maximum fort). *Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D avec $c(t, x) \leq 0$. Soit $u \in C^{1,2}(D)$ tel que $Pu \leq 0$ sur D . S'il existe $(t_0, x_0) \in \overline{D} \setminus \partial_p D$ tel que $u(x_0) = \max_{\Omega} u \geq 0$, alors $u \equiv u(x_0)$ sur $[0, t_0] \times \Omega$.*

Si $c(x) \equiv 0$, alors la condition $u(x_0) \geq 0$ n'est pas nécessaire.

Si $u(x_0) = 0$, alors la condition $c \leq 0$ n'est pas nécessaire.

Dans le cas où D est borné, le théorème 9.6 est plus fort que le théorème 9.4 : il implique en particulier que si u atteint son maximum en un point de D , alors u est constante.

Théorème 9.7 (Conséquence du lemme de Hopf). *Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D avec $c(t, x) \leq 0$. Soit $u \in C^{1,2}(D) \cap C^1(\overline{D})$ tel que $Pu \leq 0$ sur D . S'il existe $(t_0, p) \in \partial_p D$ tel que $u(t_0, p) = \max_{\overline{D}} u \geq 0$, alors ou bien $u \equiv u(t_0, p)$ sur $[0, t_0] \times \Omega$, ou bien avec n le vecteur normal sortant en p , on a*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t_0, p) > 0.$$

Si $c(x) \equiv 0$, alors la condition $u(t_0, p) \geq 0$ n'est pas nécessaire.

Si $u(t_0, p) = 0$, alors la condition $c \leq 0$ n'est pas nécessaire.

En d'autres termes, si u n'est pas constante, son gradient admet une pente stricte en un point de $\partial_p D$ où elle est maximale.

9.4 Principe du maximum fort dans dans un domaine non cylindrique

Les théorèmes précédents sont donnés dans le cas où D est un cylindre, i.e. est de la forme $]0, T[\times \Omega$. Ils sont encore vrais dans un cadre plus général. Dans le cadre du présent rapport, on aura juste besoin d'une généralisation de la conséquence du lemme de Hopf parabolique, dans le cas $N = 1$.

Soit donc D un domaine de $[0, T] \times \mathbb{R}$. On suppose que sa frontière ∂D est constituée par :

- deux ouverts connexes de \mathbb{R} D_0 et D_T vérifiant $D_0 \subset \{t = 0\} \times \mathbb{R}$ et $D_T \subset \{t = T\} \times \mathbb{R}$,
- deux courbes γ_1 et γ_2 qui peuvent s'écrire sous la forme $\{(t, f_i(t)) \mid t \in [0, T]\}$ avec $f_i \in C^2([0, T])$.

Dans ce cadre, on définit alors la frontière parabolique de D par $\partial_p D = D_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$.

En particulier, il est impossible que D s'évase "infiniment vite" (Figure 8).

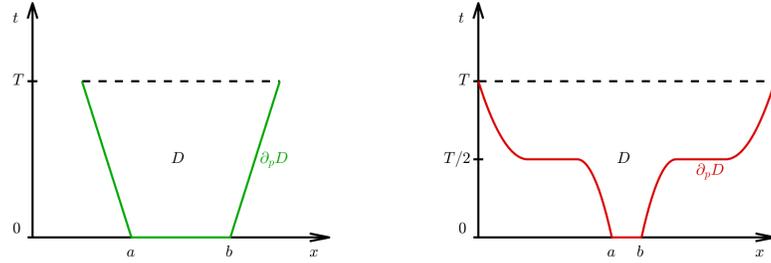


FIGURE 8 – Deux domaines D de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. A gauche, D s'évase à vitesse finie : les courbes γ_i ont la forme voulue, avec f_i affine. A droite, D s'évase à vitesse infinie en $t = T/2$.

Théorème 9.8 (Conséquence du lemme de Hopf (D non cylindrique)). *On suppose que D vérifie les hypothèses ci-dessus. Alors le théorème 9.7 reste valide.*

9.5 Principe de comparaison linéaire sur un domaine non borné

Dans le cas d'un domaine non borné, il existe un principe de comparaison linéaire, mais il nécessite des conditions supplémentaires. La définition du bord parabolique $\partial_p D$ reste inchangée.

Dans cette section, on ne suppose plus $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(D)$.

Théorème 9.9 (Principe de comparaison linéaire (domaine non borné)). *Soit P un opérateur uniformément parabolique sur D tel que*

$$\exists M > 0 \forall (t, x) \in D \quad \begin{cases} |a_{ij}(t, x)| \leq M, \\ |b_i(t, x)| \leq M(|x| + 1), \\ |c(t, x)| \leq M(|x|^2 + 1). \end{cases}$$

Soit $w \in C^{1,2}(D) \cap C(\bar{D})$ telle que $w(t, x) \geq -Be^{\beta|x|^2}$ pour des constantes $B, \beta > 0$. Alors

$$\begin{cases} Pw \geq 0, & (t, x) \in D, \\ w(t, x) \geq 0, & (t, x) \in \partial_p D \end{cases} \implies w(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in D.$$

Remarque. Par linéarité, on obtient un principe de comparaison entre $u, v \in C^{1,2}(D) \cap C(\bar{D})$: si par exemple $|u|, |v| \leq Be^{-\beta|x|^2}$, alors

$$\begin{cases} Pu \leq Pv, & (t, x) \in D, \\ u(t, x) \leq v(t, x), & (t, x) \in \partial_p D \end{cases} \implies u(t, x) \leq v(t, x), \quad (t, x) \in D.$$

Remarque. Là encore, on n'a pas besoin d'imposer de signe sur $c(t, x)$. On notera que sans la minoration $w(t, x) \geq -Be^{\beta|x|^2}$, ce théorème n'est plus vrai. Par exemple, avec

$$w(t, x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} x^{2k} \frac{d^k}{dt^k} (e^{-1/t^2}),$$

on a $\partial_t w - \partial_{xx} w = 0$, et $w(0, x) = 0$, pourtant $w(t, x) < 0$ pour $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

9.6 Principe de comparaison non-linéaire

Pour plus de concision, on considère le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 9.10 (Principe de comparaison non-linéaire). *On suppose que $D =]0, T[\times \mathbb{R}^N$. Soit $u, v \in C^{1,2}(D)$ des solutions bornées de l'équation $\partial_t w - \Delta w = F(w)$. On suppose que F et F' sont continues et bornées sur U , où U est un ouvert qui contient les valeurs prises par u et v .*

Alors, si $u(0, x) \leq v(0, x)$ sur \mathbb{R}^N , on a $u(t, x) \leq v(t, x)$ sur D .

10 Inégalité de Harnack parabolique

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $T > 0$ et D le cylindre $]0, +\infty[\times \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Soit P un opérateur uniformément parabolique défini par

$$Pu = \partial_t u - \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij}(t, x) \partial_{ij} u - \sum_{i=1}^N b_i(t, x) \partial_i u - c(t, x) u,$$

avec $a_{ij}, b_i, c \in L_{loc}^{\infty}(D)$

10.1 Inégalité de Harnack classique

Théorème 10.1 ([10]). *Soient D et P vérifiant les hypothèses du début de la section 10. Soient $\tau > 0$ et $0 < R_1 < R_2$.*

Il existe une constante $C_H > 0$ telle que pour tous $(\bar{t}, \bar{x}) \in]2\tau, +\infty[\times \mathbb{R}^N$ vérifiant $B_{\mathbb{R}^N}(\bar{x}, R_2) \subset \Omega$, et pour toute fonction $u \in C^{1,2}(D)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ qui vérifie $Pu = 0$ sur $[\bar{t} - 2\tau; \bar{t}] \times \Omega$, on a

$$\max_{B(\bar{x}, R_1)} u(\bar{t} - \tau, \cdot) \leq C_H \min_{B(\bar{x}, R_1)} u(\bar{t}, \cdot).$$

En particulier, la solution positive d'un problème parabolique linéaire ne peut pas osciller trop fortement. Par ailleurs, on sait déjà, par le principe du maximum fort, qu'elle ne peut pas atteindre zéro en \bar{t} sans s'annuler pour $t \leq \bar{t}$.

Remarque. Il est nécessaire que le décalage τ soit strictement positif pour que le théorème 10.1 soit vrai. En effet, pour $N = 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et $u(t, x) =$

$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4t}\right)$ la solution de l'équation de la chaleur, alors pour $\bar{t} = 1$, $\bar{x} = 0$, et tout $R > 0$, on a

$$\frac{\max_{x \in B(0,R)} u(1, x)}{\min_{x \in B(0,R)} u(1, x)} \geq \frac{u(1, 0)}{u(1, R)} = e^{\frac{(R+x_0)^2 - x_0^2}{4}} = e^{\frac{2Rx_0 + R^2}{4}},$$

qui n'est pas majoré par une constante $C_H > 0$ quand $x_0 \rightarrow +\infty$.

10.2 Inégalité de Harnack raffinée

Bien que le théorème 10.1 soit faux pour $\tau = 0$, sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut prouver le théorème suivant, où aucun décalage n'est requis. On n'en donne qu'une version simplifiée, qui nous suffit dans le cadre de ce rapport.

Théorème 10.2. [2] Soient D et P vérifiant les hypothèses du début de la section 10. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que

$$a_{ij}(t, x) \leq K, b_i(t, x) \leq K, c(t, x) \leq K, \quad \forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N.$$

Soit également $R > 0$, $\delta > 0$, $U > 0$, $\bar{t} > 0$.

Il existe une constante $C'_H > 0$ telle que pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, et pour toute fonction $u \in C^{1,2}(D)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ qui vérifie $Pu = 0$ sur D et $\|u\|_{L^\infty(D)} \leq U$, on a

$$\max_{B(\bar{x}, R)} u(\bar{t}, \cdot) \leq C'_H \min_{B(\bar{x}, R)} u(\bar{t}, \cdot) + \delta.$$

Références

- [1] Alfaro, M. (2017). Slowing Allee effect versus accelerating heavy tails in monostable reaction diffusion equations. *Nonlinearity*, 30(2), 687.
- [2] Alfaro, M., Berestycki, H., & Raoul, G. (2017). The Effect of Climate Shift on a Species Submitted to Dispersion, Evolution, Growth, and Nonlocal Competition. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(1), 562-596.
- [3] Alfaro, M., Coville, J., & Raoul, G. (2013). Travelling waves in a nonlocal reaction-diffusion equation as a model for a population structured by a space variable and a phenotypic trait. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(12), 2126-2154.
- [4] Berestycki, H., Hamel, F., & Rossi, L. (2007). Liouville-type results for semilinear elliptic equations in unbounded domains. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, 186(3), 469.
- [5] Berestycki, H., Jin, T., & Silvestre, L. (2016). Propagation in a non local reaction diffusion equation with spatial and genetic trait structure. *Nonlinearity*, 29(4), 1434.
- [6] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*.
- [7] Fisher, R. A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Annals of eugenics*, 7(4), 355-369.
- [8] Hamel, F., & Roques, L. (2010). Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions. *J. Differential Equations*, 249, 1726-1745
- [9] Kolmogorov, A., Petrovskii, I., and Piscounov, N (1937). Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1 :1 25.
- [10] Moser, J. (1964). A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 17(1), 101-134.
- [11] Protter, M. H., & Weinberger, H. F. (2012). *Maximum principles in differential equations*. Springer Science & Business Media.
- [12] Uchiyama, K. (1978). The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 18(3), 453-508.
- [13] Volpert, V. (2014). *Elliptic Partial Differential Equations : Volume 2 : Reaction-Diffusion Equations (Vol. 104)*. Springer.
- [14] Zlatoš, A. (2005). Quenching and propagation of combustion without ignition temperature cutoff. *Nonlinearity*, 18(4), 1463.