

Fronts d'invasion dans un système d'équations de réaction-diffusion

Gwenaël Peltier
Sous la direction de Grégory Faye

Ecole Normale Supérieure de Cachan

Sommaire

- 1 Préliminaires
- 2 Présentation du problème
- 3 Etat de l'art - Vitesse sélectionnée pour $p = 1$
- 4 Vitesse sélectionnée pour $p > 0$
- 5 Extension sur le terme réactionnel
- 6 Références

Qu'est-ce qu'une équation de réaction-diffusion ?

Si on considère $u(t, x)$ comme la densité d'une population à l'instant t en un point $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{évolution de la densité} \\ \text{de population} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{déplacement des} \\ \text{individus} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{phénomènes de} \\ \text{naissance et mort} \end{array} \right\}$$

variation temporelle de la densité :

$$u_t = \underbrace{u_{xx}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{f(u)}_{\text{réaction}}.$$

Un exemple célèbre : l'équation de Fisher-KPP [1, 2]

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u(1 - u), \\ u(t = 0, x) = \mathbf{1}_{x \leq 0}(x). \end{cases}$$

La solution de ce problème de Cauchy converge en temps long vers un front, qui se déplace à la vitesse $c^* = 2\sqrt{d\alpha}$ [3] :

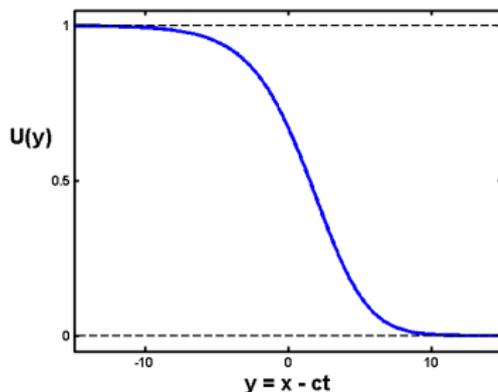


Figure: Profil asymptotique de la solution dans une fenêtre $y = x - c^*t$.

Système étudié

On étudie le système couplé d'équations de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u(1-u) + \beta v^p(1-u) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v(1-v) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{x \leq 0}(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

avec $d, \alpha, \beta, p > 0$. On s'intéresse à la vitesse de propagation en temps long de u et v .

On a vu que celle de v est $c_v = 2$, et si $\beta = 0$, celle de u est $c_u = 2\sqrt{d\alpha}$.

Pour $\beta > 0$, la solution u de ce problème adopte également la forme d'un front en temps long.

Objectifs

Afin de mesurer la vitesse asymptotique de u , on définit la vitesse sélectionnée s_{sel} par :

$$\kappa(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \mid u(t, x) \geq \frac{1}{2} \right\}, \quad s_{sel} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(t)}{t}.$$

Objectif :

Connaître l'expression de s_{sel} en fonction des paramètres d, α, β, p .

La preuve consiste à construire des sur- et sous-solutions \bar{u} et \underline{u} se propageant à la même vitesse et telles que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ pour tous (t, x) .

Une vitesse anormale

On pourrait croire que $s_{sel} = \max(c_u, c_v) = \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$, comme le montre ces figures. Pourtant, pour certaines valeurs des paramètres, on trouve $s_{sel} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$. On parlera alors de **vitesse anormale**.

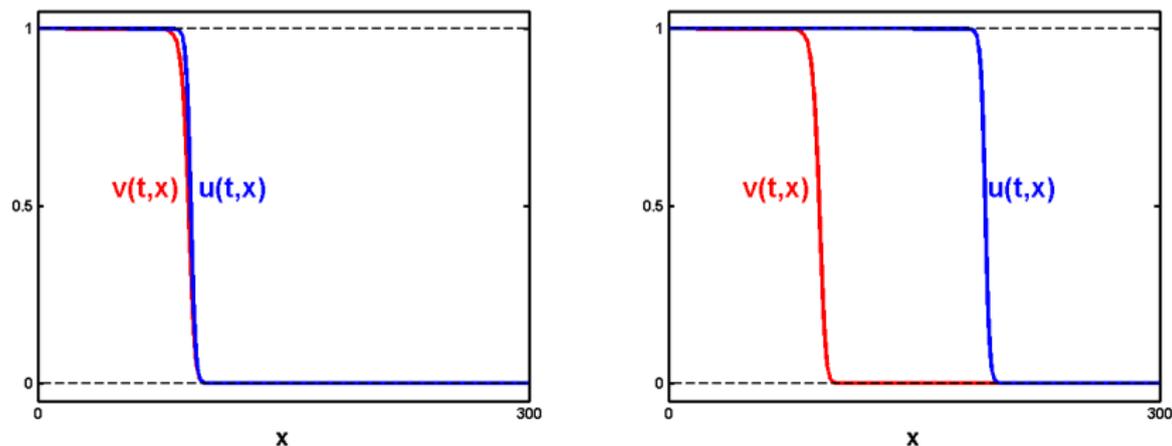


Figure: Profil des solutions u, v en temps longs pour $\beta = p = 1$. A gauche, $d = \alpha = 0,5$ et une vitesse $s_{sel} \simeq 2$. A droite, $d = \alpha = 2$ et une vitesse $s_{sel} \simeq 4$.

Le principal obstacle

Comment déterminer l'expression de la vitesse anormale ? Sur quel domaine des paramètres existe-t-elle ? On a besoin de ces informations pour construire \underline{u} et \bar{u} .

Le cas $p = 1$ a été résolu dans des travaux récents [4, 5]. On linéarise pour cela le système (1) autour du point d'équilibre ($u = 0, v = 0$) :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u + \beta v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{x \leq 0}(x) & , x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par la théorie des fonctions de Green, on peut déterminer la vitesse asymptotique de u . On la notera s_{lin} , pour vitesse linéaire.

Le cas $p = 1$

La vitesse linéaire s_{lin} sert de prédicteur pour s_{sel} . Comme le montrent ces figures, s_{lin} permet de connaître la vitesse anormale s_{anorm} et son domaine d'existence. Les constructions de \underline{u} et \bar{u} en découlent.

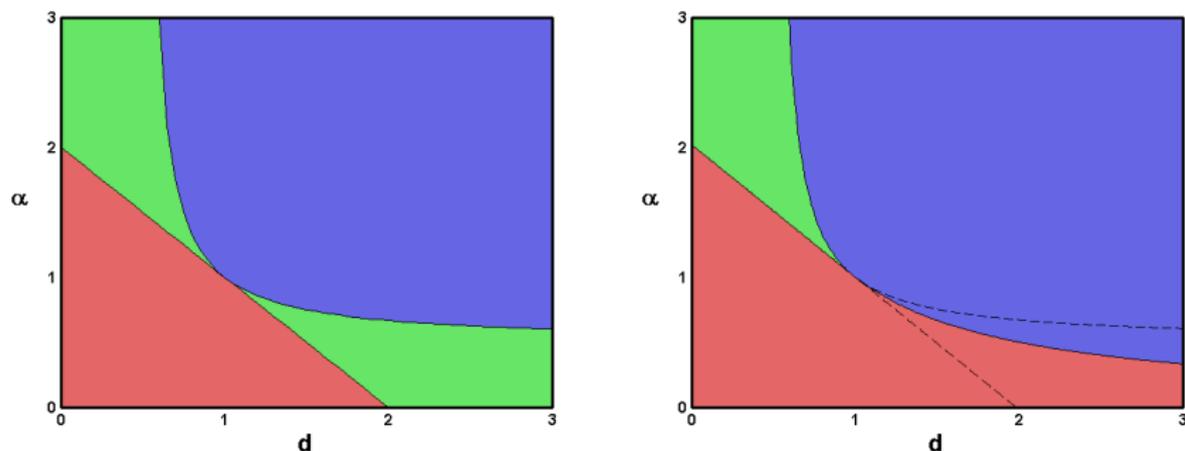


Figure: Vitesses s_{lin} , à gauche, et s_{sel} , à droite. En rouge, la vitesse vaut $c_v = 2$, en bleu, $c_u = 2\sqrt{d\alpha}$, en vert $s_{anorm}(d, \alpha) > \max(c_u, c_v)$. β ne joue aucun rôle.

Retour au cas $p > 0$

La linéarisation du terme $\beta v^p(1-u)$ n'a plus de sens. On réalise une pseudo-linéarisation, en gardant juste βv^p . On fait aussi le changement de variable $y = x - st$:

$$\begin{cases} u_t = du_{yy} + su_y + \alpha u + \beta v^p & , t > 0, y \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{yy} + sv_y + v & , t > 0, y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = v(0, y) = \mathbf{1}_{y \leq 0}(y) & , y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si on avait $\beta = 0$, les solutions seraient :

$$\begin{aligned} u(t, y) &= e^{\Lambda t} e^{my} \quad , \Lambda \in \mathbb{C}, m(s, \Lambda) \text{ solution de } dm^2 + sm + \alpha - \Lambda = 0, \\ v(t, y) &= e^{\lambda t} e^{ny} \quad , \lambda \in \mathbb{C}, n(s, \lambda) \text{ solution de } n^2 + sn + 1 - \lambda = 0. \end{aligned}$$

On notera $m_{\pm}(s, \Lambda)$ et $n_{\pm}(s, \lambda)$ les racines des équations ci-dessus.

Une approche heuristique pour $p > 0$

Dans le cas $p = 1$, avec $d, \alpha, \beta > 0$ fixés, une vitesse anormale apparaît en cas de résonance entre les modes de décroissance spatiale m et n :

$$\Lambda = \lambda, \quad m_{\pm}(s, \Lambda) = n_{\mp}(s, \lambda).$$

Alors, la vitesse anormale est la valeur s_{anorm} telle que pour tout $s \geq s_{anorm}$, les résonances arrivent pour $\text{Re}(\Lambda) = \text{Re}(\lambda) \leq 0$. Cela permet d'assurer la stabilité temporelle de u et v dans la fenêtre $y = x - st$.

L'heuristique pour $p > 0$ est de considérer que les résonances arrivent pour

$$\Lambda = p\lambda, \quad m_{\pm}(s, \Lambda) = pn_{\mp}(s, \lambda),$$

et d'en déduire une vitesse anormale. On obtient ainsi une vitesse "pseudo-linéaire" \tilde{s}_{lin} , qui va nous servir de prédicteur pour s_{sel} .

Vitesse sélectionnée dans le cas $p > 0$

Il se trouve que \tilde{s}_{lin} est aussi un bon prédicteur pour s_{sel} . La forme du diagramme dans le cas $p > 0$ est assez similaire au cas $p = 1$.

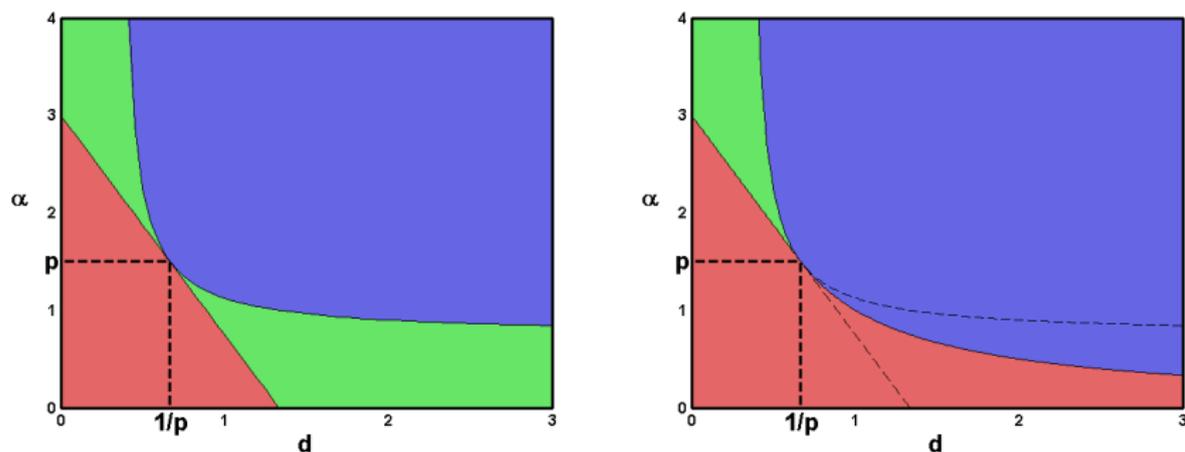


Figure: Vitesses \tilde{s}_{lin} , à gauche, et s_{sel} , à droite, pour $p = 1,5$. En rouge, la vitesse vaut $c_v = 2$, en bleu, $c_u = 2\sqrt{d\alpha}$, en vert $s_{anorm}(d, \alpha, p) > \max(c_u, c_v)$.

Le résultat principal

Grâce à notre approche heuristique, on a pu généraliser le théorème suivant du cas $p = 1$ au cas $p > 0$:

Théorème 1

La vitesse sélectionnée est donnée par :

$$s_{sel} = \begin{cases} 2 & , \alpha \leq 2p - dp^2, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , d > \frac{1}{2p} \text{ et } \alpha \geq \frac{dp^2}{2dp-1}, \\ s_{anorm} & , \text{sinon, pour } d < \frac{1}{p}, \\ \max(2, 2\sqrt{d\alpha}) & , \text{sinon, pour } d > \frac{1}{p}, \end{cases}$$

avec

$$s_{anorm} = \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha}).$$

Extension à $f(u)$ Fisher-KPP

Définition 1

Une fonction f définie sur $[0; 1]$ est Fisher-KPP si :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0, \\ f'(0) > 0 > f'(1), \\ 0 < f(u) \leq f'(0)u \quad , \quad 0 < u < 1. \end{cases}$$

On peut étendre sans difficulté le théorème 1 au système

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u) + \beta v^p(1-u) & , \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v(1-v) & , \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{x \leq 0}(x) & , \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec f Fisher-KPP, en considérant $\alpha = f'(0)$. La vitesse s_{sel} ne dépend donc de f qu'à travers la valeur $f'(0)$.

Extension à $f(u)$ Fisher-KPP (2)

En effet, la condition $f(u) \leq f'(0)u$ implique que la dynamique du front est régie par la population en queue du front (on parle de **front tiré**). C'est aussi pour cela que linéariser en $(0,0)$ fournit un bon prédicteur.

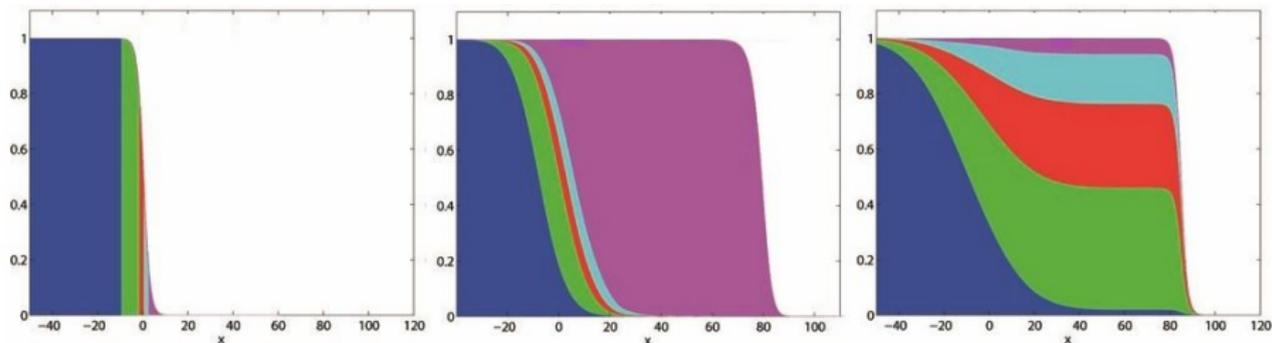


Figure: En haut, front et compartimentage à l'instant initial. Au milieu : évolution en temps long pour un front tiré. En bas : évolution en temps long pour un front poussé. Source : <http://informatique-mia.inra.fr/biosp/Lionel.Roques>.

Conclusion

Les résultats suivants ont été obtenus :

- On a déterminé la vitesse sélectionnée du système (1), qui comporte notamment un terme de couplage en $\beta v^p(1 - u)$, $p > 0$. On a mis en évidence l'existence d'une vitesse anormale.
- On a généralisé ce résultat en considérant un terme réactionnel $f(u)$ avec f Fisher-KPP, plutôt que $\alpha u(1 - u)$.

Références

- [1] Fisher, R. A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Annals of eugenics*, 7(4), 355-369.
- [2] Kolmogorov, A., Petrovskii, I., and Piscounov, N (1937). Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1:1 25.
- [3] Aronson, D. G., & Weinberger, H. F. (1978). Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Advances in Mathematics*, 30(1), 33-76.
- [4] Holzer, M. (2014). Anomalous spreading in a system of coupled Fisher–KPP equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 270, 1-10.
- [5] Holzer, M. (2015) A proof of anomalous invasion speeds in a system of coupled Fisher-KPP equations. *DCDS-A*, 36(4):2069-2084, 2016.